Mathematics

DEC 22 1938

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 179

Heft 4

Ausgegeben am 12. November 1938

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1938

Band 179. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Neumer, Walter, Die allgemeinsten Differentialgleichungen vierter und fünfter Ordnung, welche durch Berührungstransformation in die Differentialgleichungen der Parabeln und der Kegelschnitte übergeführt werden können	193
Krull, Wolfgang, Dimensionstheorie in Stellenringen	204
Eichler, M., Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen	227
Wissenschaftliche Wettbewerbe der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V.	252

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Die allgemeinsten Differentialgleichungen vierter und fünfter Ordnung, welche durch Berührungstransformation in die Differentialgleichungen der Parabeln und der Kegelschnitte übergeführt werden können.

Von *Walter Neumer* in Worms.

Vorbemerkung.

F. Engel hat die allgemeine Form der Differentialgleichungen 4. und 5. Ordnung angegeben, welche durch *Punkt*transformation in die Differentialgleichung $3y''y^{IV}-5y'''^2=0$ aller Parabeln und in die Differentialgleichung $9y''^2y^V-45y''y'''y^{IV}+40y'''^3=0$ aller Kegelschnitte verwandelt werden können [1]). Die von ihm benutzte Methode läßt sich sinngemäß auf Berührungstransformationen übertragen, sobald man die Definitionsgleichungen der allgemeinsten 5-, 6- und 8-gliedrigen Berührungstransformationsgruppen kennt, welche mit der projektiven Gruppe eines Linienelementes, der affinen G_6 und der projektiven G_8 der Ebene ähnlich sind. Diese Definitionsgleichungen sind in einer früheren Abhandlung [2]) von mir aufgestellt worden. Der daselbst skizzierte Weg zur Gewinnung der genannten Differentialgleichungen 4. und 5. Ordnung wird in der nachfolgenden Untersuchung nunmehr durchgeführt.

§ 1. Einleitung.

1. Dem Rechnen mit Berührungstransformationen (B.T.n) der Ebene angemessen ist die Verwendung der folgenden Operationen (Op.n) bezüglich einer Funktion f von x, y, y':

$$(1)\qquad \partial_1 f = f_1 = f_x + y' f_y, \quad \partial_2 f = f_2 = f_{y'}, \quad \partial_3 f = f_3 = f_y$$

mit der Eigenschaft

$$(2)\qquad f_3 = f_{12} - f_{21} = (\partial_2 \partial_1) \qquad ((f_i)_k = f_{ik};\ i,k = 1,2,3);$$

wegen (2) ist es möglich, die Ausübung der partiellen Differentiationen nach x, y, y' zu ersetzen durch die Ausführung der Op.n ∂_1, ∂_2 allein. Die Op. $f_{i_1,\ldots,i_s}(i_1, \ldots, i_s = 1, 2)$ heißt eine Op. s-ter Stufe; nach (2) ist also f_3 eine Op. zweiter Stufe zu nennen. Die vier Op.n zweiter Stufe $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ sind voneinander unabhängig; zwischen den Op.n 3. Stufe bestehen die Beziehungen

---

[1]) F. Engel, F. Schwanhäusser, Bestimmung der Differentialinvarianten von Gruppen der Ebene aus den Definitionsgleichungen, Berichte der Sächsischen Akad. d. Wissensch., Math.-physikal. Klasse, **74** (1922), S. 43—60.

[2]) W. Neumer, Die allgemeinste mit der projektiven G_8 der Ebene ähnliche Gruppe von Berührungstransformationen, dieses Journal **173** (1935), S. 125—159.

(3) $$f_{13} = f_{31},\ f_{23} = f_{32},$$

die sich wegen (2) so schreiben lassen:

(4) $$2f_{121} = f_{112} + f_{211}, \qquad 2f_{212} = f_{221} + f_{122}.$$

Die Relationen 4. und höherer Stufe gewinnt man schrittweise aufsteigend aus (4) durch Ausübung der Op.n ∂_1, ∂_2 und durch Substitution von f_1, f_2 an die Stelle von f. Die Relationen (4) entsprechen den Vertauschbarkeitsrelationen $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xy'} = f_{y'x}$, $f_{yy'} = f_{y'y}$ [3]).

Wir verwenden in der Folge noch gewisse Op.n der Form

(5) $$\partial_\varepsilon f = f_\varepsilon = f_1 - \varepsilon(x, y, y')\, f_2,$$

wobei die Funktion $\varepsilon(x, y, y')$ dann näher bestimmt sein wird. Benützen wir ferner die Abkürzung

(6) $$y'' + \varepsilon(x, y, y') = y''_\varepsilon,$$

dann haben wir folgende Formel für die totale Differentiation nach x:

(7) $$\frac{df}{dx} = \dot f = f_\varepsilon + y''_\varepsilon f_2;$$

unter f ist dabei wieder eine Funktion von x, y, y' verstanden.

Wir werden im folgenden ganz allgemein $\dot f$ für $\frac{df}{dx}$ schreiben, auch wenn f noch von y'', y''' usw. abhängt.

2. Die allgemeinste mit der projektiven G_8 der Ebene ähnliche Gruppe von B.T.n — wir wollen sie mit $\mathcal{G}_8$ bezeichnen — ist vollständig charakterisiert durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen (Diffgl.n) 2. O., die sie als größte Gruppe gestatten, indem sie in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen. Sind nämlich diese beiden Diffgl.n dargestellt durch

(8) $$y'' + \alpha(x, y, y') = 0,\ \ y'' + \beta(x, y, y') = 0,$$

dann bestehen zwischen den Funktionen α, β bei Verwendung der Bezeichnungen

(9) $$\omega = \beta - \alpha \neq 0,\ \ \overline{\omega} = \frac{1}{\omega},\ \ \overline{\alpha} = \overline{\omega}_\alpha - 2\overline{\omega}\alpha_2,\ \ \bar{\bar{\alpha}} = 3\overline{\omega}\alpha_3 - \alpha_2\overline{\alpha},$$
$$\Lambda = \overline{\alpha}_\alpha + \bar{\bar{\alpha}} + \alpha_{22},\ \ \mathsf{M} = \Lambda_\alpha + 4(-\alpha_{23} + \overline{\alpha}\alpha_3)$$

die beiden Beziehungen [4])

(10) $$\mathsf{M}_\alpha + 6\alpha_{33} + \alpha_2\mathsf{M} + 3\alpha_3\Lambda = 0,$$
$$\Lambda_{22} - 2\overline{\omega}\mathsf{M}_2 + 2(2\overline{\alpha}_{23} + 3\overline{\omega}_{33}) - 3(\overline{\omega}\Lambda)_3 + \overline{\alpha}(\Lambda_2 + 4\overline{\alpha}_3) - \overline{\omega}_2\mathsf{M} = 0.$$

Diese Beziehungen sind auch hinreichend, damit die Diffgl.n (8) eine $\mathcal{G}_8$ gestatten. Bei Verwandlung der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ in die projektive $\mathcal{G}_8$ gehen die Diffgl.n (8) über in $y'' = 0$, $y'' = \infty$ oder in $y'' = \infty$, $y'' = 0$. Die Relationen (10) sind demnach auch notwendig und hinreichend dafür, daß zwei Diffgl.n (8) durch B.T. in $y'' = 0$, $y'' = \infty$ übergeführt werden können. Da die Diffgl.n (8) bezüglich der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta) = \mathcal{G}_8(\beta, \alpha)$ völlig gleichberechtigt sind, müssen die Relationen (10) bei Vertauschung von α, β im ganzen reproduziert werden. Deuten wir die Vertauschung von α, β in einer Größe (F) durch einen Stern (F^*) an, dann sind also die Relationen (10) gleichbedeutend mit den folgenden (es ist $\overline{\omega}^* = -\overline{\omega}$, und für $\overline{\alpha}^*$ schreiben wir bequemer $\overline{\beta}$):

(10*) $$\mathsf{M}^*_\beta + 6\beta_{33} + \beta_2\mathsf{M}^* + 3\beta_3\Lambda^* = 0,$$
$$\Lambda^*_{22} + 2\overline{\omega}\mathsf{M}^*_2 + 2(2\overline{\beta}_{23} - 3\overline{\omega}_{33}) + 3(\overline{\omega}\Lambda^*)_3 + \bar{\beta}(\Lambda^*_2 + 4\bar{\beta}_3) + \overline{\omega}_2\mathsf{M}^* = 0.$$

---

[3]) L. Gąsiorowski, Über die Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene, Dissertation Gießen = Prace matematyczno-fizyczne **26** (1914), S. 135—202; daselbst ist von den Op.n ∂_1, ∂_2 zum ersten Male in der Literatur Gebrauch gemacht.

[4]) A. a. O. [2]), Formeln (95) und (96); die Formeln (9) und (10) des Textes sind etwas einfacher geschrieben.

Die projektive $\mathcal{G}_8$, d. h. die $\mathcal{G}_8(0, \infty)$ wird reproduziert durch die ∞^8 dualistischen Transformationen (Trf.n), welche die beiden Diffgl.n $y'' = 0$, $y'' = \infty$ — die Diffgl.n der Geraden und der Punkte [5]) — miteinander vertauschen. Zu jeder $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ gibt es folglich auch ∞^8 B.T.n, welche die Diffgl.n (8) untereinander vertauschen und die $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ selber ungeändert lassen; wir wollen sie die in bezug auf die $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ dualistischen B.T.n nennen. Dann läßt sich das dualistische Prinzip von der projektiven $\mathcal{G}_8$ sofort auf die allgemeine $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ übertragen [6]).

Aus der Forderung der Invarianz der Diffgl.n (8) findet man sogleich die Definitionsgleichungen (Defgl.n) für die charakteristische Funktion (ch. Fu.) $U(x, y, y')$ der allgemeinen infinitesimalen B.T. (inf. B.T.) der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$:

$$U_{\alpha\alpha} + \alpha_2 U_\alpha + \alpha_3 U = 0, \; U_{\beta\beta} + \beta_2 U_\beta + \beta_3 U = 0 . \tag{11}$$

3. In der projektiven $\mathcal{G}_8$ sind zwei Scharen von je ∞^2 gleichberechtigten sechsgliedrigen Untergruppen G_6 enthalten. Die G_6 der einen Schar werden vertreten durch die affine G_6; sie stellen somit jeweils die größte Untergruppe der proj. $\mathcal{G}_8$ dar, bei der eine bestimmte Gerade invariant bleibt. Die G_6 der andern Schar hingegen sind zu denen der ersten dualistisch; sie lassen je einen Punkt in Ruhe. Demnach sind auch in der allgemeinen $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ zwei bezüglich der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ dualistische Scharen von je ∞^2 gleichberechtigten Untergruppen vom Typus $\mathcal{G}_6$ (so wollen wir die mit der affinen G_6 der Ebene ähnlichen B.T.s-Gruppen bezeichnen) enthalten. Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{C}_\alpha, \mathfrak{C}_\beta$ die Integralkurven der Diffgl.n (8), dann läßt jede $\mathcal{G}_6$ der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ entweder eine Kurve $\mathfrak{C}_\alpha$ oder eine $\mathfrak{C}_\beta$ in Ruhe; unter $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta)$ bzw. $\mathcal{G}_6(\beta, \alpha)$ wollen wir eine $\mathcal{G}_6$ mit invarianter $\mathfrak{C}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{C}_\beta$ verstehen. Die Defgl.n einer $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta)$ bestehen aus den Gleichungen (11) und einer Gleichung 3. Stufe der Form [7])

$$U_{3\alpha} + \lambda U_{2\alpha} + \lambda_\alpha U_2 - \lambda_2 U_\alpha - \lambda_3 U = 0, \tag{12}$$

wo λ die Diffgl.n

$$\text{(12')} \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \lambda_\alpha = -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3, \\ &\text{(b)} \quad \begin{cases} \lambda_{2\alpha} = -\lambda\lambda_2 + \overline{\omega}\lambda^3 - \overline{\alpha}\lambda^2 + (\tfrac{1}{2}\Lambda - \alpha_{22})\lambda - \tfrac{1}{6}\mathsf{M} - \alpha_{23}, \\ \lambda_{22} = -3\overline{\omega}\lambda\lambda_2 + \overline{\alpha}\lambda_2 - \overline{\omega}^2\lambda^3 + (\overline{\omega}\overline{\alpha} - \overline{\omega}_2)\lambda^2 \\ \qquad + (\overline{\omega}_3 + \overline{\alpha}_2 - \tfrac{1}{2}\overline{\omega}\Lambda)\lambda + \tfrac{1}{6}(\overline{\omega}\mathsf{M} - 2(\Lambda_2 + \overline{\alpha}_3)) \end{cases} \end{aligned}$$

befriedigt. Vermöge (10) ist das System (12′) unbeschränkt integrabel und liefert ∞^2 Lösungen λ [8]), von denen jede eine durch (11) und (12) definierte $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ und folglich auch eine Kurve $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$ bestimmt.

Ganz entsprechend wird durch die Gleichungen (11) im Verein mit der Gleichung

$$U_{3\beta} + \mu U_{2\beta} + \mu_\beta U_2 - \mu_2 U_\beta - \mu_3 U = 0, \tag{13}$$

worin μ den aus (12′) durch Vertauschung von λ und μ, α und β hervorgehenden Diffgl.n

$$\text{(13')} \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mu_\beta = -\mu^2 - \beta_2\mu - \beta_3, \\ &\text{(b)} \quad \begin{cases} \mu_{2\beta} = -\mu\mu_2 - \overline{\omega}\mu^3 - \bar{\beta}\mu^2 + (\tfrac{1}{2}\Lambda^* - \beta_{22})\mu - \tfrac{1}{6}\mathsf{M}^* - \beta_{23}, \\ \mu_{22} = 3\overline{\omega}\mu\mu_2 + \bar{\beta}\mu_2 - \overline{\omega}^2\mu^3 - (\overline{\omega}\bar{\beta} + \overline{\omega}_2)\mu^2 \\ \qquad + (\tfrac{1}{2}\overline{\omega}\Lambda^* - \overline{\omega}_3 + \bar{\beta}_2)\mu - \tfrac{1}{6}(\overline{\omega}\mathsf{M}^* + 2(\Lambda_2^* + \bar{\beta}_3)) \end{cases} \end{aligned}$$

genügt, eine $\mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)$ definiert, welche die Kurve $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ in Ruhe läßt. Das System (13′) besitzt wieder ∞^2 Lösungen μ.

Die *Durchschnittsgruppe* zweier $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$, $\mathcal{G}({}_6\beta, \alpha, \mu)$, d. h. die durch (11), (12) und (13) definierte größte Untergruppe der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$, welche die Kurven $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ invariant

---

[5]) A. a. O. [2]), S. 129.
[6]) A. a. O. [2]), § 6, **1.**
[7]) A. a. O. [2]), § 5, **3.**
[8]) A. a. O. [2]), Theorem 1.

läßt, ist nun *fünf*gliedrig oder *vier*gliedrig, je nachdem $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$ und $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ sich *berühren* oder *nicht* [9]). Die *Berührungsbedingung* dieser beiden Kurven besteht in der Relation [9])

$$(14) \qquad \mu_2 - \lambda_2 - \overline{\omega}(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + \overline{\alpha}\lambda - \overline{\beta}\mu + \tfrac{1}{4}(\Lambda^* - \Lambda) = 0;$$

die ∞^1 Kurven $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ bzw. $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, die eine gegebene Kurve $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$ bzw. $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ berühren, werden bestimmt durch die Diffgl.n (13′a) und (14) für μ bzw. (12′a) und (14) für λ.

Die fünfgliedrigen Gruppen, die durch ein System (11), (12) und (13) mit der Relation (14) definiert werden, bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_5$, genauer

$$\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \mathcal{G}_5(\beta, \alpha, \mu, \lambda);$$

jede $\mathcal{G}_5$ ist in bezug auf die $\mathcal{G}_8$, der sie angehört, *zu sich selbst dualistisch*; sie ist ähnlich mit der projektiven Gruppe eines *Linienelementes*, z. B. mit der Gruppe

$$(15) \qquad p, q, xq; \quad xp + yq, yq \qquad \left(p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

In jeder $\mathcal{G}_8$ sind ∞^3 Gruppen $\mathcal{G}_5$ enthalten, jede $\mathcal{G}_6$ enthält ∞^1 Gruppen $\mathcal{G}_5$.

4. Die Gruppe (15) besitzt eine invariante Diffgl. 3. O., nämlich $y''' = 0$; das ist die Diffgl. aller Parabeln, die durch den unendlich fernen Punkt der y-Achse gehen. Denken wir uns die Gruppe (15) in eine allgemeine $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ transformiert, dann muß der Diffgl. $y''' = 0$ eine invariante Diffgl. 3. O. — die wir mit $\mathcal{D}_3$ bezeichnen — entsprechen, welche ∞^3 Kurven definiert mit der Eigenschaft, daß sie die Kurven $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ in ihrem Berührungspunkte berühren. Natürlich sind die ∞^3 Integralkurven der $\mathcal{D}_3$ zugleich Integralkurven derjenigen Diffgl. 5. O., die aus der Diffgl. der *Kegelschnitte* bei Transformation der projektiven $\mathcal{G}_8$ in die allgemeine $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ hervorgeht; diese Diffgl. soll mit $\mathcal{D}_5$ bezeichnet werden, ihre Integralkurven mit $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$.

Die $\mathcal{D}_3$ einer $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ besitzt nun die Form [10])

$$(16) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\nu(y'' + \alpha)}{y'' + \beta}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\nu y''_\alpha}{y''_\beta}\right) = 0 \text{ [11])},$$

worin die Größe ν bis auf einen konstanten Faktor durch die Diffgl.n

$$(16') \qquad \frac{\nu_\alpha}{\nu} = 3\lambda - \omega\overline{\alpha}, \qquad \frac{\nu_\beta}{\nu} = -3\mu - \omega\overline{\beta}$$

bestimmt wird.

Bei Verwendung der leicht zu bestätigenden Formel

$$(17) \qquad \frac{df}{dx} = \overline{\omega}(y''_\beta f_\alpha - y''_\alpha f_\beta)$$

liefert Ausrechnung von (16) sogleich die Diffgl.

$$(18) \qquad L^{(3)} \equiv z + 3\overline{\omega}w(\lambda y''_\beta + \mu y''_\alpha) = 0,$$

wo

$$(18') \quad w = \overline{\omega}y''_\alpha y''_\beta, \; z = \overline{\omega}(y''_\beta \dot{y}''_\alpha - y''_\alpha \dot{y}''_\beta) + w(\overline{\beta}y''_\alpha - \overline{\alpha}y''_\beta) = y''' + \cdots.$$

In der Diffgl. (18) kommen bei gegebenen α, β noch drei willkürliche Konstanten, und zwar in den Verbindungen λ, μ vor. Indessen bestimmen diese ∞^3 Diffgl.n (18) nicht ∞^6 sondern nur ∞^5 Integralkurven, nämlich die ∞^5 Kurven $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$, welche durch die $\mathcal{D}_5$ der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ definiert werden. Daher muß es möglich sein, durch *zwei*malige Differentiation von (18) die drei in (18) enthaltenen Konstanten zu eliminieren und zu einer nur noch von α, β abhängigen Diffgl. 5. O. zu gelangen, die dann nichts anderes ist als die

---

[9]) A. a. O. [2]), § 6, **2** bis **4**.
[10]) A. a. O. [2]), § 6, **5**.
[11]) Vgl. Formel (6).

$\mathcal{D}_5$ der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$. Oder anders ausgedrückt: Durch zweimalige Differentiation von (18) müssen sich λ, μ vermöge (12′), (13′) und (14) so eliminieren lassen, daß eine nur von α, β abhängige Diffgl. 5. O. herauskommt, der alle Integralkurven $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$ aller Diffgl.n (18) genügen.

§ 2. Herleitung der Diffgl.n $\mathcal{D}_4$ und $\mathcal{D}_5$.

1. Man sieht ohne weiteres, daß durch einmalige Differentiation von (18) z. B. die Größe μ mittels (13′a) und (14) entfernt werden kann, so daß man zu einer Diffgl. 4. O. $\mathcal{D}_4$ gelangt, die (außer von α, β noch) von λ abhängt und die bei gegebenem λ von allen Integralkurven aller ∞^1 Diffgl.n (18) befriedigt wird. Diese Integralkurven sind natürlich die ∞^4 Kurven $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$, welche die Kurve $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$ berühren; die Schar dieser ∞^4 Kurven $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$ kann mithin durch B.T. in die *Schar aller Parabeln* übergeführt werden, die gegenüber der affinen G_6 invariant bleibt. Unsere $\mathcal{D}_4$ gestattet also die $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ und ist somit deren invariante Diffgl. 4. O.

Schreibt man die Diffgl. (18) für den Augenblick in der Form

$$z + 3(\lambda v + \mu u) = 0 \quad (u = \bar{\omega} y''_\alpha w,\ v = \bar{\omega} y''_\beta w), \tag{19}$$

dann liefert totale Differentiation von (19) nach x mit Benutzung von (7) für $\varepsilon = \alpha$ bzw. $\varepsilon = \beta$

$$\dot{z} + 3[v(\lambda_\alpha + \lambda_2 y''_\alpha) + \lambda\dot{v} + u(\mu_\beta + \mu_2 y''_\beta) + \mu\dot{u}] = 0;$$

setzt man hierin für λ_α, μ_β ihre Werte aus (12′a), (13′a) und für μ_2 seinen Wert aus (14) ein und ersetzt man, nachdem dies geschehen, μ durch den aus (19) stammenden Ausdruck

$$\mu = -\frac{z}{3u} - \lambda \frac{y''_\beta}{y''_\alpha}, \tag{19′}$$

so gelangt man nach einer kleinen Rechnung mit Rücksicht z. B. auf die Identität

$$\omega_2 = \omega(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \tag{20}$$

zu der gewünschten $\mathcal{D}_4$:

$$L^{(4)} \equiv Z - 2\lambda w(\bar{\omega} y''_\beta z + 3\overline{\alpha} w^2) + 3\bar{\omega}\lambda^2 y''_\beta w^2(\bar{\omega} y''_\alpha - 1) + 6\lambda_2 w^3 = 0, \tag{21}$$

$$Z = w\dot{z} - \tfrac{1}{6} z(z + 9\dot{w}) + 3w^2(\tfrac{1}{4}(\Lambda - \Lambda^*)w - \bar{\omega}(\alpha_3 y''_\beta + \beta_3 y''_\alpha)). \tag{21′}$$

Die Diffgl. (21) *stellt also die allgemeinste Diffgl. 4. O. vor, welche durch B.T. in die Diffgl. der Parabeln verwandelt werden kann.*

Da der Koeffizient von y^{IV} in (21) gleich $\bar{\omega}(y'' + \alpha)(y'' + \beta)$ ist und der Ausdruck $L^{(4)}$ als ganze rationale Funktion von $y'', y''', y^{\mathrm{IV}}$ offenbar nicht weiter in Faktoren zerlegt werden kann, sind die Größen α, β aus der vorgelegten Diffgl. (21) eindeutig bestimmbar. Dann läßt sich, wie man leicht überblickt, auch die Größe λ, und zwar in ihrer Unsymmetrie gegenüber den Größen α, β, bestimmen. *Eine $\mathcal{D}_4$ gestattet also nur eine $\mathcal{G}_6$, und daraus ist zu schließen, daß diese $\mathcal{G}_6$ zugleich die größte von der $\mathcal{D}_4$ gestattete Gruppe sein muß.*

Vertauscht man in (21) α mit β und ersetzt man λ durch μ, so erhält man die invariante $\mathcal{D}_4$ der $\mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)$ (es ist $z^* = z$):

$$L^{(4)*} \equiv Z^* - 2\mu w(\bar{\omega} y''_\alpha z - 3\bar{\beta} w^2) + 3\bar{\omega}\mu^2 y''_\alpha w^2(\bar{\omega} y''_\beta + 1) - 6\mu_2 w^3 = 0, \tag{22}$$

$$Z^* = -w\dot{z} - \tfrac{1}{6} z(z - 9\dot{w}) + 3w^2(\tfrac{1}{4}(\Lambda - \Lambda^*)w + \bar{\omega}(\alpha_3 y''_\beta + \beta_3 y''_\alpha)). \tag{22′}$$

2. Differenzieren wir die Diffgl. (21) total nach x, ersetzen die Op.n λ_α, $\lambda_{2\alpha}$, λ_{22} durch die Ausdrücke (12′) und entfernen dann noch λ_2 vermöge (21), so haben wir

zum Schluß eine Diffgl. 5. O., die wir auf die Form

$$y^{V} + R(y'', y''', y^{IV}; \lambda) = 0 \tag{23}$$

bringen können, wo R eine rationale Funktion ihrer Argumente bedeutet, deren Koeffizienten aus α, β und ihren Op.n aufgebaut sind. Der Diffgl. (23) genügen alle Integralkurven von (21); diese befriedigen jedoch auch noch die invariante $\mathcal{D}_5$ der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$, die wir uns in der Form

$$y^{V} + R'(y'', y''', y^{IV}) = 0 \tag{23'}$$

zu denken haben, wo die Koeffizienten der rationalen Funktion R' ebenfalls aus α, β und ihren Op.n gebildet sind. Folglich erfüllen die ∞^4 Integralkurven von (21) auch die Diffgl.

$$R(y'', y''', y^{IV}; \lambda) - R'(y'', y''', y^{IV}) = 0\,. \tag{24}$$

Das kann nur so geschehen, daß (24) entweder mit (21) gleichbedeutend ist oder die Form $0 = 0$ besitzt. Die erste Möglichkeit scheidet aus, denn in (24) kommt λ_2 gar nicht vor. Also muß $R \equiv R'$ sein, d. h. *λ darf in R nur scheinbar auftreten, muß vielmehr in Wahrheit aus R herausfallen.* Die — von λ freie — Diffgl. (23) repräsentiert somit die gesuchte $\mathcal{D}_5$. Dieser Umstand erleichtert die Berechnung der $\mathcal{D}_5$ ganz ungemein.

Wir finden nämlich aus (21) wegen (12') für $\dot{L}^{(1)}$ einen Ausdruck der Form

$$\dot{L}^{(4)} = A - 2w^2(z - 9\dot{w} + 6\bar{\omega}\lambda y''_\beta w)\lambda_2 + B\lambda + B'\lambda^2 + B''\lambda^3, \tag{25}$$

wo A, B, B', B'' von λ frei sind. Der Ausdruck

$$L^{(5)} = w\dot{L}^{(4)} + \tfrac{1}{3}(z - 9\dot{w} + 6\bar{\omega}\lambda y''_\beta w)L^{(4)}, \tag{26}$$

der λ_2 nicht mehr enthält, muß demnach, gleich Null gesetzt, die gesuchte $\mathcal{D}_5$ liefern, d. h. auch λ muß aus $L^{(5)}$ verschwunden sein. Bei der Ausrechnung von $L^{(5)}$ in (26) brauchen wir daher nur die von vornherein von λ freien Glieder zu berücksichtigen, d. h. es wird

$$L^{(5)} = wA + \tfrac{1}{3}(z - 9\dot{w})Z\,. \tag{26'}$$

Setzen wir in (26') den leicht zu bestimmenden Ausdruck für A ein, so gelangen wir zu der folgenden Form für die gesuchte $\mathcal{D}_5$:

$$\begin{aligned} L^{(5)} \equiv{}& w\dot{Z} + \tfrac{1}{3}(z - 9\dot{w})Z + 2\bar{\omega}\alpha_3 y''_\beta w^2 z \\ &+ w^4[(\bar{\omega}\mathsf{M} - 2(\Lambda_2 + \bar{\alpha}_3))y''_\alpha - \Lambda_\alpha + 2(\bar{\alpha}\alpha_3 - \alpha_{23})] = 0\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Die Diffgl. (27) *ist demnach die allgemeinste Diffgl. 5. O., die sich in die Diffgl. der Kegelschnitte durch eine geeignete B.T. überführen läßt.*

Da der Ausdruck $L^{(5)}$ die Form $w^2 y^{V} + \cdots$ besitzt, und da die Diffgl.n $y'' + \alpha = 0$ und $y'' + \beta = 0$ bezüglich der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ und folglich auch bezüglich deren $\mathcal{D}_5$ völlig gleichberechtigt sind, *muß $L^{(5)}$ in α, β symmetrisch sein.* Ferner ergibt sich sofort, daß bei gegebener Diffgl. (27) die Größen α, β eindeutig bestimmt sind, d. h. *daß eine $\mathcal{D}_5$ nur eine $\mathcal{G}_8$ gestattet, die dann zugleich die größte von ihr überhaupt gestattete Gruppe ist, welche von inf. Trf.n erzeugt wird.*

§ 3. Die Differentialinvarianten der Gruppen $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_6$ und $\mathcal{G}_8$ [12]).

1. Bezeichnet $\frac{\delta}{\delta t}$ die einer inf. B.T. mit der ch. Fu. U entsprechende Variation, dann gilt die leicht zu bestätigende Formel

$$\frac{\delta y^{(i)}}{\delta t} = -(U_{12} + (i-1)U_{21} + iU_{22}y'')y^{(i)} - \cdots \qquad (i = 3, 4, \ldots), \tag{28}$$

[12]) Die Entwicklungen dieses Paragraphen sind orientiert an dem Verfahren von F. Engel in seiner unter [1]) zitierten Schrift.

wo die Punkte Glieder mit $y^{(i-1)}, \ldots, y''$ andeuten. Ist ferner

$$D^{(i)} \equiv y^{(i)} + F(x, y, y', \ldots, y^{(i-1)}) = 0 \tag{29}$$

eine gegenüber der inf. B. T. U invariante Diffgl. i-ter O., dann muß $\frac{\delta D^{(i)}}{\delta t} = \frac{\delta y^{(i)}}{\delta t} + \frac{\delta F}{\delta t}$ vermöge $D^{(i)} = 0$ verschwinden, und daraus folgt

$$\frac{\delta D^{(i)}}{\delta t} = -(U_{12} + (i-1)U_{21} + iU_{22}y'')\, D^{(i)} \qquad (i = 3, 4, \ldots). \tag{29'}$$

Bedeuten nunmehr $L^{(3)}, L^{(4)}, L^{(5)}$ wieder die linken Seiten der Diffgl.n (18), (21), (27), so gilt wegen $L^{(i)} = w^{i-3}y^{(i)} + \cdots (i = 3, 4, 5)$

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{L^{(i)}}{w^{i-3}} = -(U_{12} + (i-1)U_{21} + iU_{22}y'')\frac{L^{(i)}}{w^{i-3}} \qquad (i = 3, 4, 5). \tag{30}$$

Die Variation $\frac{\delta}{\delta t}$ bezieht sich dabei jeweils auf die inf. Trf.n der Gruppen der Diffgl.n $L^{(i)} = 0$.

Man bestätigt ferner durch eine leichte Rechnung unter Berücksichtigung von (11), daß

$$\frac{\delta w}{\delta t} = -(U_{12} + U_{21} + 2U_{22}y'')\, w; \tag{31}$$

die Operation $\frac{\delta}{\delta t}$ bezieht sich dabei auf die inf. Trf.n der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$. Schließlich gilt ganz allgemein

$$\frac{\delta dx}{\delta t} = (U_{21} + U_{22}y'')\, dx. \tag{32}$$

Bedeuten nun $A, B, \ldots$ solche Ausdrücke, für welche die Quotienten

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{\delta A}{\delta t} = A', \quad \frac{1}{B}\cdot\frac{\delta B}{\delta t} = B', \ldots$$

von $A, B, \ldots$ unabhängig werden, dann wird wegen

$$\frac{\delta}{\delta t}(A^a B^b \cdots) = (aA' + bB' + \cdots) A^a B^b \cdots \tag{33}$$

auch $\frac{1}{A^a B^b \ldots}\cdot\frac{\delta}{\delta t}(A^a B^b \cdots)$ von $A^a B^b \cdots$ unabhängig.

Die Formel (33) gibt ein Mittel in die Hand, aus den Größen $L^{(i)}(i = 3, 4, 5)$, w und dx *Differentialinvarianten* (Diffinv.n) zu konstruieren. So findet man, *daß die Ausdrücke*

$$\sigma^{(3)} = \frac{L^{(3)}}{w}dx, \quad \sigma^{(4)} = \frac{L^{(4)\frac{1}{2}}}{w}dx, \quad \sigma^{(5)} = \frac{L^{(5)\frac{1}{3}}}{w}dx \tag{34}$$

in dieser Reihenfolge invariante Bogenelemente (B.El.e) der Gruppen $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$, $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$, $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ vorstellen, während die Größen

$$I^{(4)} = \frac{L^{(4)}}{L^{(3)2}}, \qquad I^{(5)} = \frac{L^{(5)}}{L^{(4)\frac{3}{2}}} \tag{35}$$

die niedrigsten Diffinv.n der $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$, $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ repräsentieren. Die höheren Diffinv.n der Gruppen $\mathcal{G}_5$ und $\mathcal{G}_6$ bekommt man durch invariante Differentiation von $I^{(4)}$ und $I^{(5)}$ mit Hilfe der B.El.e $\sigma^{(3)}$ und $\sigma^{(4)}$.

2. Die niedrigste Diffinv.e der Gruppe $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ ist von 7. O. Sie ist zugleich Diffinv.e aller Gruppen $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ und muß sich daher aus drei Diffinv.n 5., 6. und 7. O. der $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ zusammensetzen lassen. Um dies durchzuführen, leiten wir aus $I^{(5)}$ neue Diffinv.n der $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ her, und zwar durch invariante Differentiation mittels $\sigma^{(5)}$. So gewinnen wir zunächst die Diffinv.e

$$3\frac{d(I^{(5)-\frac{2}{3}})}{\sigma^{(5)}} = \frac{3w}{L^{(5)\frac{1}{3}}}\frac{d}{dx}\frac{L^{(4)}}{L^{(5)\frac{2}{3}}} = \frac{w}{L^{(5)2}}(3\dot{L}^{(4)}L^{(5)} - 2L^{(4)}\dot{L}^{(5)}),$$

die wegen (26) auch so geschrieben werden kann:

$$3 - (z - 9\dot{w} + 6\bar{\omega}\lambda y''_\beta w)\frac{L^{(4)}}{L^{(5)}} - \frac{2wL^{(4)}\dot{L}^{(5)}}{L^{(5)2}};$$

lassen wir den Summanden 3 weg, so erhalten wir durch Multiplikation des übrigbleibenden Ausdruckes mit $-I^{(5)\frac{2}{3}}$ die folgende Diffinv.e 6. O.:

$$(36) \qquad I^{(6)} = W + \frac{6\bar{\omega}\lambda y''_\beta w}{L^{(5)\frac{1}{3}}}, \quad W = \frac{2w\dot{L}^{(5)}}{L^{(5)\frac{4}{3}}} + \frac{z - 9\dot{w}}{L^{(5)\frac{1}{3}}}.$$

Jetzt bilden wir aus (36) die Diffinv.e 7. O.

$$(37) \qquad I^{(7)} = \frac{w}{L^{(5)\frac{1}{3}}}\frac{dI^{(6)}}{dx};$$

subtrahieren wir von $I^{(7)}$ die Diffinv.e $I^{(5)-\frac{2}{3}}$, so erhalten wir nach einer kleinen Rechnung den folgenden von λ_2 freien Ausdruck:

$$(38) \quad I^{(7)} - I^{(5)-\frac{2}{3}} = \frac{w\dot{W}}{L^{(5)\frac{1}{3}}} - \frac{Z + 6\bar{\omega}\alpha_3 y''_\beta w^2}{L^{(5)\frac{2}{3}}} - \frac{\bar{\omega}\lambda y''_\beta wW}{L^{(5)\frac{1}{3}}} - \frac{3\bar{\omega}^2\lambda^2 y''^2_\beta w^2}{L^{(5)\frac{2}{3}}}.$$

Addieren wir endlich zu (38) die Diffinv.e $\frac{1}{12}I^{(6)2}$, so fällt λ heraus, und wir bekommen die folgende Diffinv.e 7. O. der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$:

$$(39) \quad J^{(7)} = I^{(7)} + \frac{1}{12}I^{(6)2} - I^{(5)-\frac{2}{3}} = \frac{w\dot{W}}{L^{(5)\frac{1}{3}}} + \frac{1}{12}W^2 - \frac{Z + 6\bar{\omega}\alpha_3 y''_\beta w^2}{L^{(5)\frac{2}{3}}}.$$

Aus der durch (39) *gegebenen niedrigsten Diffinv.e $J^{(7)}$ der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ können wir durch invariante Differentation mittels des B.El es $\sigma^{(5)}$ alle höheren Diffinv.n ableiten.*

Da der Koeffizient von $y^{(7)}$ in $J^{(7)}$ gleich $\frac{2w^4}{L^{(5)\frac{5}{3}}}$, also symmetrisch in α, β ist, muß auch $J^{(7)}$ selber in α, β symmetrisch sein.

Man überzeugt sich ferner unschwer davon, daß aus $\sigma^{(3)}$ sowohl wie aus $I^{(4)}$ die Größen $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, desgleichen aus $\sigma^{(4)}$ wie aus $I^{(5)}$ die Größen α, β, λ und schließlich aus $\sigma^{(5)}$ wie aus $J^{(7)}$ die Größen α, β eindeutig entnommen werden können. Daraus schließt man, *daß die größten von inf. Trf.n erzeugten Gruppen, welche die B.El.e $\sigma^{(3)}, \sigma^{(4)}, \sigma^{(5)}$ bzgl. die Funktionen $I^{(4)}, I^{(5)}, J^{(7)}$ invariant lassen, die Gruppen*

$$\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu), \quad \mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda), \quad \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$$

sind.

§ 4. Einige Grenzübergänge.

1. Lassen wir in den vorstehend entwickelten invarianten Gebilden die Größe β gegen Unendlich streben, so erhalten wir die allgemeinsten Gebilde, die durch *Punkt*-Trf.

(P.T.) aus den ihnen bei der proj. $\mathcal{G}_8$ entsprechenden hervorgehen. Mit den Diffgl.n (21) und (27) wollen wir diesen Grenzübergang jetzt vornehmen.

Ist bezüglich der Diffgl.n (8) die Funktion $\beta = \infty$, dann nehmen die Relationen (10) (wegen $\overline{\omega} = 0$) die Form an:

$$(40)\qquad \begin{gathered} 6\alpha_{33} + \alpha_{22\alpha\alpha} - 4\alpha_{23\alpha} + \alpha_2(\alpha_{22\alpha} - 4\alpha_{23}) + 3\alpha_{22}\alpha_3 = 0, \\ \alpha_{2222} = 0; \end{gathered}$$

diese Relationen charakterisieren die Diffgl.n $y'' + \alpha(x, y, y') = 0$, die durch P.T. in $y'' = 0$ verwandelt werden können. Aus (40) folgt, daß α die Form

$$(41)\qquad \alpha = My'^3 + 3Ly'^2 - 3Ry' - N$$

hat, wo die nur von x, y abhängigen Größen L, M, N, R die folgenden Relationen befriedigen [13]):

$$(42)\qquad \begin{aligned} &L_{xx} - N_{yy} + 2R_{xy} - 3R(L_x + 2R_y) + N(2M_x - 3L_y) + MN_x - 3LN_y = 0, \\ &R_{yy} - M_{xx} + 2L_{xy} - 3L(R_y + 2L_x) + M(2N_y - 3R_x) + NM_y - 3RM_x = 0. \end{aligned}$$

Die Defgl.n (11) werden für $\beta = \infty$ zu

$$(43)\qquad U_{\alpha\alpha} + \alpha_2 U_\alpha + \alpha_3 U = 0, \quad U_{22} = 0;$$

(43) definiert die $\mathcal{G}_8(\alpha, \infty)$, d. h. die größte Gruppe von P.T.n, der gegenüber die Diffgl. $y'' + \alpha = 0$ invariant ist. Schreiben wir wie üblich $U = y'\xi(x, y) - \eta(x, y)$, dann folgen aus (43) für ξ, η die Defgl.n (α hat den Wert (41)) [14]):

$$(44)\qquad \begin{array}{rrrrrrr} \eta_{xx} & -2N\xi_x & & -3R\eta_x & +N\eta_y & -N_x\xi & -N_y\eta = 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} & -3R\xi_x & -3N\xi_y & +6L\eta_x & & -3R_x\xi & -3R_y\eta = 0, \\ 2\xi_{xy} - \eta_{yy} & & +6R\xi_y & -3M\eta_x & -3L\eta_y & -3L_x\xi & -3L_y\eta = 0, \\ \xi_{yy} & +M\xi_x & -3L\xi_y & & -2M\eta_y & -M_x\xi & -M_y\eta = 0. \end{array}$$

Durch die Gleichungen (43) und (12) endlich wird die allgemeine Gruppe $\mathcal{G}_6(\alpha, \infty, \lambda)$ definiert, d. h. die allgemeinste durch P.T. mit der affinen $\mathcal{G}_6$ ähnliche Gruppe. Die Diffgl.n (12′) für λ werden in der Grenze $\beta = \infty$ zu

$$(45)\qquad \begin{aligned} \lambda_\alpha &= -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3, \\ \lambda_{2\alpha} &= -\lambda\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\lambda - \tfrac{1}{3}a_{23} - \tfrac{1}{6}\alpha_{22\alpha}, \\ \lambda_{22} &= -\tfrac{1}{3}\alpha_{222}. \end{aligned}$$

Nach (45) besitzt λ die Gestalt

$$(46)\qquad \lambda = -My'^2 + (m - 3L)y' + r,$$

wo die von x, y abhängenden Größen m, r folgenden Diffgl.n genügen [15]):

$$(47)\qquad \begin{aligned} m_x &= -mr + 2L_x + R_y + MN, \quad & m_y &= -m^2 + 3Lm - Mr + M_x + 3MR, \\ r_y &= -mr + 2R_y + L_x + MN, \quad & r_x &= -r^2 + 3Rr - Nm + N_y + 3NL. \end{aligned}$$

Setzt man $U = y'\xi - \eta$ in (12) ein, so bekommt man mit Rücksicht auf (41) und (46) zu (44) noch zwei neue Gleichungen für ξ, η, die zu (44) hinzugenommen das System von Defgl.n der allgemeinsten mit der affinen $\mathcal{G}_6$ der Ebene durch P.T. ähnlichen Gruppe liefern [16]):

---

[13]) A. a. O. [2]), Formeln (72); daselbst ist L, R statt $3L, 3R$ geschrieben. Die Relationen (42) des Textes wurden zuerst aufgestellt von A. G. Hall in seiner Dissertation: Bestimmung der Definitionsgleichungen aller endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene (Leipzig 1902), S. 19.

[14]) A. a. O. [2]), Formeln (36); die Defgl.n (44) des Textes sind zuerst von F. Engel angegeben worden in seiner Habilitationsschrift: Über die Definitionsgleichungen der kontinuierlichen Transformationsgruppen, Math. Annalen **27** (1886), S. 1—57.

[15]) A. a. O. [2]), Formeln (71); daselbst steht μ_2, ϱ_2 für m, r.

[16]) Die Defgl.n (48) mit den Relationen (47) finden sich zuerst — in etwas anderer Form — in der Habilitationsschrift von F. Engel [14]); vgl. auch a. a. O. [1]), Formeln (1) bis (3) und (15) bis (17) sowie (2′), (3′). Die dortigen Größen β, ε entsprechen den Größen m, r des Textes.

$$
\begin{array}{lllllll}
\xi_{xx} = (2r-3R)\,\xi_x & -N\xi_y & +2m\eta_x & & +(2r_x-3R_x)\xi & +(2r_y-3R_y)\eta, \\
\xi_{xy} = & (r-3R)\xi_y & +M\eta_x & +m\eta_y & +m_x\xi & +m_y\eta, \\
\xi_{yy} = -M\xi_x & +3L\xi_y & & +2M\eta_y & +M_x\xi & +M_y\eta; \\
\eta_{yy} = & 2r\xi_y & -M\eta_x & +(2m-3L)\eta_y & +(2m_x-3L_x)\xi & +(2m_y-3L_y)\eta, \\
\eta_{xy} = r\xi_x & +N\xi_y & +(m-3L)\eta_x & & +r_x\xi & +r_y\eta, \\
\eta_{xx} = 2N\xi_x & & +3R\eta_x & -N\eta_y & +N_x\xi & +N_y\eta.
\end{array} \tag{48}
$$

2. Um den Grenzübergang $\beta \to \infty$ in der $\mathcal{D}_4$ mit der Gleichung (21) zu vollziehen, setzen wir zunächst $\beta = b = \text{const.}$ und lassen dann $b \to \infty$ streben. Das ist erlaubt, da die Relationen (10) für $\beta = b$ immer noch durch ∞^∞ Funktionen $\alpha(x, y, y')$ befriedigt werden können und sie bei dem speziellen Grenzübergang $\beta = b \to \infty$ dieselben Relationen (40) für α liefern wie bei dem allgemeinen Grenzübergang $\beta \to \infty$. Für $\beta = b \to \infty$ wird nun $\bar{\beta} = 0$, $\Lambda^* = -\alpha_{22}$, ferner

$$
\begin{aligned}
&w = y''_\alpha, \quad z = \dot{y}''_\alpha + 2\alpha_2 y''_\alpha, \\
&Z = y''_\alpha \ddot{y}''_\alpha - \tfrac{5}{3}\dot{y}''^2_\alpha - \tfrac{5}{3}\alpha_2 y''_\alpha \dot{y}''_\alpha + \tfrac{7}{2}\alpha_{22} y''^3_\alpha + (2\alpha_{2\alpha} - 3\alpha_3 - \tfrac{2}{3}\alpha_2^2) y''^2_\alpha.
\end{aligned} \tag{49}
$$

Die Diffgl. (21) reduziert sich also in der Grenze $\beta = \infty$ auf

$$
Z - 2\lambda y''_\alpha z - 3\lambda^2 y''^2_\alpha + 6\lambda_2 y''^3_\alpha = 0, \tag{50}
$$

worin z und Z die Ausdrücke in (49) bedeuten.

Setzt man in (50) für α, λ ihre Ausdrücke (41), (46) ein, so bekommt man an Stelle von (50) folgenden nicht eben kurzen Ausdruck für die Diffgl. allgemeinster Art, welche durch P.T. in die Diffgl. der Parabeln verwandelt werden kann:

$$
\begin{aligned}
&y''_\alpha \ddot{y}''_\alpha - \tfrac{5}{3}\dot{y}''^2_\alpha + (-3My'^2 - 4Ly' + 5R)\, y''_\alpha \dot{y}''_\alpha + 3y''^3_\alpha\,(3My' + L) \\
&+ 3y''^2_\alpha\,[-3M^2y'^4 + (M_y - 10LM)\,y'^3 + (12MR - 5L^2 + 2M_x + L_y)\,y'^2 \\
&+ (8LR + 4MN + 4L_x + R_y)\,y' + 4LN - 2R^2 - 2R_x + N_y] \\
&+ 2(my' + r)\,(-y''\dot{y}''_\alpha + 3\,(-My'^2 - Ly' + 2R)\,y''^2_\alpha) + 6my''^3_\alpha - 3(my' + r)^2 y''^2_\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{51}
$$

Die vorstehende Diffgl. — die invariante $\mathcal{D}_4$ der $\mathcal{G}_6$ mit den Gleichungen (48) — ist (bis auf die andere Buchstabenbezeichnung) dieselbe, die von F. Engel angegeben worden ist [17]). Durch totale Differentiation von (51) und Elimination von $\frac{dm}{dx}$, $\frac{d}{dx}(my' + r)$ mittels (47) sowie von m mittels (51) — wobei dann $my' + r$ von selbst herausfällt — hat Engel die allgemeine $\mathcal{D}_5$ hergeleitet, die sich durch P.T. in die Diffgl. der Kegelschnitte überführen läßt [17]). Wir können diese $\mathcal{D}_5$ ebenfalls für $\beta = \infty$ aus (27) gewinnen:

$$
y''_\alpha \dot{Z} + (\tfrac{2}{3}\alpha_2 y''_\alpha - \tfrac{8}{3}\dot{y}''_\alpha)\, Z + 2\alpha_3 y''^2_\alpha\,(\dot{y}''_\alpha + 2\alpha_2 y''_\alpha) - (2\alpha_{222} y''_\alpha + 2\alpha_{23} + \alpha_{22\alpha})\, y''^4_\alpha = 0. \tag{52}
$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes (41) für α muß sich aus (52) die von Engel gefundene Form der $\mathcal{D}_5$ der $\mathcal{G}_8(\alpha, \infty)$ herstellen lassen; wegen der Umständlichkeit der dazu nötigen Rechnungen verzichten wir jedoch darauf.

3. Zum Schluß möge noch kurz auf den Grenzübergang $\beta \to \infty$ in der durch (22) dargestellten $\mathcal{D}_4$ eingegangen werden; wir erhalten dadurch die allgemeinste Diffgl., die sich durch P.T. in die Diffgl. der ∞^4 Kegelschnitte durch einen gegebenen Punkt, z. B. den Nullpunkt, transformieren läßt. Setzt man in (13) $\mu = -\beta\mu'$ und läßt dann $\beta \to \infty$ streben, so erhält man mit Rücksicht auf die zweite Relation (11) die Gleichung

$$
U_{23} - \mu' U_{12} - \mu'_2 U_1 + \mu'_1 U_2 - \mu'_3 U = 0; \tag{53}
$$

---

[17]) A. a. O. [1]), S. 53 und 54.

die Größe μ' befriedigt dabei die Relationen [18])

$$(53') \qquad \begin{aligned} \mu'_2 &= -\mu'^2, \\ \mu'_{12} &= -\mu'\mu'_1 + \alpha\mu'^3 - \alpha_2\mu'^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\mu' - \tfrac{1}{6}\alpha_{222}, \\ \mu'_{11} &= -3\alpha\mu'\mu'_1 + \alpha_2\mu'_1 - \alpha^2\mu'^3 + (\alpha\alpha_2 - \alpha_1)\,\mu'^2 \\ &\quad + (2\alpha_{21} - \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha_{22})\,\mu' - \tfrac{1}{3}(2\alpha_{221} - \alpha_{212}) + \tfrac{1}{6}\alpha\alpha_{222}, \end{aligned}$$

die aus (13′) durch den Grenzübergang $\beta \to \infty$ gewonnen werden können (auch durch den speziellen Grenzübergang $\beta = b \to \infty$). Das System (43) und (53) definiert dann die allgemeine $\mathcal{G}_6(\infty, \alpha, \mu')$. Mit Berücksichtigung der aus (13′a) folgenden Beziehung

$$(54) \qquad \mu_2 = -\mu'_1 + b\mu'^2 \qquad (\beta = b = \text{const.})$$

erhalten wir aus (22) durch den speziellen Grenzübergang $\beta = b \to \infty$ die gewünschte invariante $\mathcal{D}_4$ der allgemeinen $\mathcal{G}_6(\infty, \alpha, \mu')$:

$$(55) \qquad \begin{aligned} &y''_\alpha \ddot{y}''_\alpha - \tfrac{4}{3}\dot{y}''^2_\alpha - \tfrac{1}{3}\alpha_2 y''_\alpha \dot{y}''_\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha_{22} y''^3_\alpha + (-3\alpha_3 + 2\alpha_{2\alpha} + \tfrac{2}{3}\alpha_2^2)\, y''^2_\alpha \\ &\qquad - 2y''^2_\alpha\,(\mu'(\dot{y}''_\alpha - \alpha_2 y''_\alpha) + 3\mu'_1 y''_\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Für μ' findet sich nach (53′) der Wert

$$(56) \qquad \mu' = \frac{1}{y' + k(x, y)},$$

und k erfüllt die Diffgl.n

$$(57) \qquad \begin{aligned} kk_y &= k_x + Mk^3 - 3Lk^2 - 3Rk + N, \\ kk_{xx} &= 2k_x^2 - 3(Rk - N)\,k_x + (2L_x + R_y + MN)\,k^3 + (3R_x - N_y - 3LN)\,k^2 \\ &\quad - (N_x + 3NR)\,k + N^2. \end{aligned}$$

Vertauscht man in (57) L und R, M und N, $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$, endlich k mit $k' = \frac{1}{k}$, so erhält man ein gleichwertiges System. Die Diffgl. $y' + k(x, y) = 0$ definiert übrigens die ∞^1 Kurven $\mathfrak{C}_\alpha$ durch den invarianten Punkt $\mathfrak{C}_\infty(\mu')$ der $\mathcal{G}_6$ (∞, α, μ').

Auf eine nähere Ausrechnung der Diffgl. (55) durch Einsetzen der Ausdrücke (41) und (56) für α und μ' wollen wir nicht weiter eingehen.

---

[18]) A. a. O. [2]), Formeln (171).

Eingegangen 1. März 1938.

Dimensionstheorie in Stellenringen[1]).

Von *Wolfgang Krull* in Erlangen.

Unter einem *Stellenring* verstehe ich im folgenden einen kommutativen, nicht notwendig nullteilerfreien Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement, der der Maximalbedingung (dem Noetherschen „Teilerkettensatz") genügt, und in dem die Menge $\mathfrak{m}$ aller Nichteinheiten ein Ideal bildet, das dann das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}$ darstellt. Jeder nullteilerfreie Ring, für den die Maximalbedingung gilt, ist Durchschnitt von (nullteilerfreien) Stellenringen, und man kann infolgedessen die Betrachtung eines beliebigen Ringes mit Maximalbedingung in vielen Fällen auf die Betrachtung geeigneter Stellenringe zurückführen. — Für einen Stellenring $\mathfrak{R}$ gilt stets der

Durchschnittssatz. *Der Durchschnitt* $\Delta\mathfrak{m}^r$ *aller Potenzen des maximalen Primideals* $\mathfrak{m}$ *ist gleich dem Nullideal* [2]).

Es sei nun $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine Basis von $\mathfrak{m}$, S ein volles Restsystem von $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{m}$, also ein Repräsentantensystem des Restklassenkörpers $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$; dann kann man jedes Element γ aus $\mathfrak{R}$ formal auf mindestens eine Weise in eine Potenzreihe in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit Koeffizienten aus S entwickeln, und der Durchschnittssatz zeigt, daß γ durch Angabe einer einzigen zugehörigen Entwicklung eindeutig bestimmt ist. Ein Stellenring ist also formal etwas ähnliches wie ein Potenzreihenring in endlich vielen Variabeln mit Körperkoeffizienten oder, genauer ausgedrückt, wie ein Restklassenring eines solchen Potenzreihenrings. *Es soll gezeigt werden, daß hinter dieser äußerlichen Ähnlichkeit tiefere Zusammenhänge stecken.*

Nicht übertragbar ist allerdings derjenige Teil der Potenzreihentheorie, zu dessen Aufbau man den Weierstraßschen Vorbereitungssatz notwendig braucht. Denn in allgemeinen Stellenringen gibt es zu diesem Satz kein Gegenstück. Aber E. Lasker [3]) hat eine Anzahl bemerkenswerter Potenzreihensätze aufgestellt, bei deren Beweis man garnicht die vollen Reihenentwicklungen, sondern nur das Rechnen mit ihren Anfangsgliedern sowie ein einfaches Konvergenzprinzip braucht, und die Übertragung der Laskerschen Sätze auf beliebige Stellenringe gelingt, weil dort der Durchschnittssatz dasselbe leistet wie im Spezialfall das Konvergenzprinzip. Dabei arbeiten wir in Übereinstimmung mit dem Laskerschen Vorbild *nicht* mit den formalen Reihenentwicklungen der Ringelemente, die oben nur zur Verdeutlichung des Grundgedankens besprochen wurden.

---

[1]) In einer gleichbetitelten Note in den Sitz.Ber. der Erlanger Phys.-Med. Sozietät (Bd. **67**, S. 320—323) habe ich schon 1936 die Hauptsätze 8 und 11 der vorliegenden Arbeit mit einer kurzen Beweisskizze mitgeteilt. In der Bezeichnungsweise schließe ich mich an meinen „Idealbericht" (Idealtheorie, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Bd. 4, Heft 3 (1935)) an. Ober- bzw. Unterideal bedeutet also soviel wie Idealteiler bzw. Idealvielfaches; mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ wird die Summe (der größte gemeinschaftliche Teiler) bzw. der Durchschnitt (das kleinste gemeinschaftliche Vielfache) der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet; ist $\mathfrak{a}$ Oberideal von $\mathfrak{b}$, so wird $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$ geschrieben, wobei das Gleichheitszeichen nur dann wegbleibt, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sicher verschieden sind.

[2]) Vgl. hierzu: W. Krull, Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, Sitz. Ber. der Heidelberger Akad. der Wiss. 1928, 7. Abhandl. Vgl. ferner Idealbericht, Nr. 15.

[3]) E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Annalen **60** (1905), S. 20—116; Abschnitt III.

Wir definieren vielmehr im Stellenring $\mathfrak{R}$ mit Hilfe einer festen Minimalbasis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des maximalen Primideals $\mathfrak{m}$ den Begriff der *Anfangsform* eines Elementes a so, daß die Anfangsformen homogene Polynome (*Formen*) im Polynomring $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, \ldots, x\ ]$ über dem Restklassenkörper $\mathsf{K} = \mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ werden. Besitzt jedes Ringelement nur eine einzige Anfangsform, so heißt der Stellenring $\mathfrak{R}$ ein *p-Reihenring*. Alle p-Reihenringe sind *Integritätsbereiche* und im Noetherschen Sinne „*ganz abgeschlossen*". — Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus dem beliebigen Stellenring $\mathfrak{R}$, so bildet die Menge der Anfangsformen aller Elemente von $\mathfrak{a}$ ein Formenideal [4]) $\bar{\mathfrak{a}}$ in $\mathfrak{P}$, das als das *Leitideal* von $\mathfrak{a}$ bezeichnet wird. Das erste Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der folgenden Hauptsätze:

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ *im Stellenring* $\mathfrak{R}$ *besitzt stets dieselbe Dimension wie sein Leitideal* $\bar{\mathfrak{a}}$ *im Polynomring* $\mathfrak{P}$.

In einem p-Reihenring $\mathfrak{R}$ *ist bei einem beliebigen Primideal* $\mathfrak{p}$ *die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt stets gleich der Gliederzahl n einer Minimalbasis des maximalen Primideals* $\mathfrak{m}$.

Dabei sind die Begriffe „Dimension" und „Dimensionsdefekt" im Sinne der Idealtheorie mit Hilfe von Primoberideal- bzw. Primunteridealketten zu definieren [5]). — Der Beweis des ersten Hauptsatzes zerfällt in zwei Teile: Daß die Dimension von $\mathfrak{a}$ nicht kleiner ist als die von $\bar{\mathfrak{a}}$, zeigt man durch Übertragung und weitgehende Verallgemeinerung gewisser einfacher Laskerscher Potenzreihenrechnungen; daß sie umgekehrt auch nicht größer sein kann, ergibt sich aus dem Durchschnittssatz, aber nicht unmittelbar, sondern erst mit Hilfe von gewissen tieferliegenden Folgerungen, die sich schon in der in Anm. [2]) zitierten Arbeit finden [6]). — Beim Beweis des zweiten Hauptsatzes stützt man sich auf einen bekannten Lasker-Macaulayschen Satz über „ungemischte" Polynomideale.

Der Begriff des p-Reihenringes ist als die richtige abstrakte Verallgemeinerung des Begriffes eines Potenzreihenringes mit Körperkoeffizienten anzusehen, während die übrigen Stellenringe den Restklassenringen der Potenzreihenringe entsprechen. Fragt man nun nach denjenigen Stellen- und p-Reihenringen, die dieselbe Vollständigkeitseigenschaft besitzen wie der Ring *aller* formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über einem Körper K, so kommt man zwanglos zu folgender Begriffsbildung: Der Stellenring $\mathfrak{R}$ mit dem maximalen Primideal $\mathfrak{m}$ soll *perfekt* heißen, wenn ein unendliches Kongruenzensystem $x \equiv a_i (\mathfrak{m}^i)$ nach allen Potenzen von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{R}$ stets lösbar ist, falls nur jedes endliche Teilsystem daselbst eine Lösung hat [7]). Mit wohlbekannten Überlegungen zeigt man mühelos, daß jeder beliebige Stellenring $\mathfrak{R}$ in eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte *perfekte Hülle* $\mathfrak{R}^*$ eingebaut werden kann, und aus dem Durchschnittssatz folgt sofort: *Eine lineare Gleichung* $a_0 = a_1 z_1 + \cdots + a_m z_m$ *mit Koeffizienten* a_i *aus* $\mathfrak{R}$, *die in* $\mathfrak{R}^*$ *lösbar ist, besitzt stets auch in* $\mathfrak{R}$ *eine Lösung.* Dieser abstrakte Satz gestattet überraschende Anwendungen. Man beachte z. B., daß für $\mathfrak{R}$ der Ring aller *konvergenten*, für $\mathfrak{R}^*$ der Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten gewählt werden kann [8]).

Was das genauere Aussehen der perfekten Stellenringe und insbesondere der perfekten p-Reihenringe angeht, so zeigt man mühelos mit klassischen Henselschen Überlegungen [9]):

---

[4]) Also ein Formensystem mit den üblichen Idealeigenschaften, wobei nur bei der Addition gefordert werden muß, daß die einzelnen Formensummanden alle denselben Grad besitzen.

[5]) Vgl. zu diesen Definitionen Nr. **3** des Textes.

[6]) Eine kurze Neuableitung dieser Folgerungen findet sich in Nr. **8** des Textes.

[7]) Diese Definition ist natürlich der Perfektheitsdefinition der Bewertungstheorie nachgebildet.

[8]) Vgl. den Schluß von Nr. **7** des Textes.

[9]) Es handelt sich um ein Konstruktionsverfahren, das bereits in Hensels „Theorie der algebraischen Zahlen" (Leipzig 1908) eine Hauptrolle spielt.

Ein perfekter p-Reihenring $\mathfrak{R}^*$, *dessen Restklassenkörper* $\mathsf{K} = \mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ *die Charakteristik* 0 *besitzt, ist stets isomorph zum Ring aller formalen Potenzreihen in endlich vielen Variabeln* $x_1, \ldots, x_n$ *über* K.

Für einen *perfekten diskreten Bewertungsring* $\mathfrak{D}^*$ gelten nach Hasse und Schmidt [10]) entsprechende Strukturs̈atze auch dann, wenn $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ Primzahlcharakteristik besitzt. Die Übertragung dieser weit tieferliegenden Sätze ist nun allerdings nicht ohne weiteres durchführbar; aber es zeigt sich wenigstens die Möglichkeit, die Menge aller perfekten p-Reihenringe auf wenige einfache Typen zurückzuführen und darüber hinaus einen Überblick über die Gesamtheit aller perfekten Stellenringe zu gewinnen. Gleichzeitig liefert die Bewertungstheorie die Richtlinien, nach denen diese wichtigen „konstruktiven" Aufgaben anzupacken wären [11]).

Die Brauchbarkeit der Begriffe Anfangsform und Leitideal ist nicht auf den Fall der Stellenringe beschränkt. Es sei etwa P ein beliebiger Integritätsbereich mit Maximalbedingung, $\mathfrak{R}$ bedeute den Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über P. Dann besitzt jede Reihe $A(x)$ aus $\mathfrak{R}$ eine eindeutig bestimmte Entwicklung $A(x) = \sum_{i=m}^{\infty} \varphi_i(x)$ mit $\varphi_m(x) \neq 0$ nach homogenen Polynomen steigenden Grades in $x_1, \ldots, x_n$, und es liegt auf der Hand, die Form $\varphi_m(x)$ aus dem Polynomring $\mathfrak{P} = \mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$ als Anfangsform von $A(x)$ zu bezeichnen [12]). In der Tat zeigt sich, daß für die mit Hilfe dieser „natürlichen" Anfangsformen definierten Leitideale der gleiche Hauptsatz gilt wie oben bei den Stellenringen:

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *besitzt stets dieselbe Dimension wie sein zugehöriges Leitideal* $\bar{\mathfrak{a}}$ *in* $\mathfrak{P}$.

Spezialisiert man ferner den Koeffizientenring P, wählt man insbesondere für P einen Ring vom Typus der ganzen rationalen Zahlen oder vom Typus der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers, so erhält man schärfere Sätze, die für das scheinbar ganz aus dem Rahmen unserer Betrachtungen fallende Teilbarkeitsproblem der ganzzahligen Potenzreihen von entscheidender Bedeutung sind [13]).

1. Der Durchschnittssatz.

Satz 1. *In einem Stellenring* $\mathfrak{R}$ *ist der Durchschnitt* $\mathfrak{n}$ *aller Potenzen des maximalen Primideals* $\mathfrak{m}$ *stets gleich dem Nullideal* [2]).

In der Tat, stellt man, was wegen der Maximalbedingung sicher möglich ist, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}$ jeweils als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen dar, so sieht man sofort, daß sich $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}$ von $\mathfrak{n}$ nur durch eine zu $\mathfrak{m}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ unterscheiden kann, $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{q}$. Wegen der Maximalbedingung ist aber $\mathfrak{m}^\varrho \leqq \mathfrak{q}$ für hinreichend großes ϱ; es wird also erst recht $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{q}$ und damit $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. — Es sei nun $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r)$; dann gilt wegen $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ ein Gleichungssystem $n_i = \sum_{k=1}^{r} m_{ik} n_k$ $(i = 1, \ldots, r)$ mit Koeffizienten m_{ik} aus $\mathfrak{m}$, und daraus folgt weiter

$$(d) \cdot (n_1, \ldots, n_r) = (d) \cdot \mathfrak{n} = (0),$$

---

[10]) H. Hasse, F. K. Schmidt, Die Struktur diskret bewerteter Körper, dieses Journal **170** (1933), S. 4—63.

[11]) Vgl. Nr. **7** des Textes. (Keine Beweise, aber genaue Beschreibung der Richtlinien, nach denen vorzugehen wäre.)

[12]) In dieser Weise wird die Anfangsform auch bei Lasker definiert. Lasker beschränkt sich allerdings auf Potenzreihen mit Körperkoeffizienten, so daß er nicht über den Fall der Stellenringe hinauskommt. In einem allgemeineren Fall hat wohl zuerst I. Schur den Begriff der Anfangsform und des Leitideals benützt: Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschrift **12** (1922), S. 95—113.

[13]) Zum Zusammenhang mit dem Teilbarkeitsproblem vgl. meine Note: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. V. Potenzreihenringe, Math. Zeitschrift **43** (1938), S. 768—782.

falls d die Determinante

$$|m_{ik} - \delta_{ik}| \quad \left(i, k = 1, \ldots, r;\ \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}\right)$$

bedeutet. d ist aber ein nicht zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Element und damit eine Einheit aus $\mathfrak{R}$. Wir haben also $(d) = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} = (0)$.

Satz 2. *Ist im Stellenring $\mathfrak{R}$ das Element a für jedes ϱ in $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^\varrho$ enthalten, so gehört a zu $\mathfrak{a}$.*

Zum Beweis hat man nur zu beachten: Gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ ist auch $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ein Stellenring, und zwar ist $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ das maximale Primideal von $\overline{\mathfrak{R}}$. Bedeutet ferner $\overline{0}$ bzw. $\overline{a}$ die durch 0 bzw. a erzeugte Restklasse aus $\overline{\mathfrak{R}}$, so hat man $\overline{a} < \overline{\mathfrak{m}}^\varrho$ für jedes ϱ und damit $\overline{a} = \overline{0}$, $a < \mathfrak{a}$ nach Satz 1. — Aus Satz 2 folgt insbesondere: Bilden in $\mathfrak{R}$ die Elemente $a_1, \ldots, a_r$ modulo jeder Potenz von $\mathfrak{m}$ eine Basis von $\mathfrak{a}$, ist also

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^\varrho = (a_1, \ldots, a_r) + \mathfrak{m}^\varrho$$

für jedes ϱ, so ist $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$. — Ist a in $\mathfrak{R}$ modulo jeder Potenz von $\mathfrak{m}$ durch b teilbar, gilt also für jedes ϱ eine Gleichung $a = b \cdot c_\varrho + d_\varrho$ mit zu $\mathfrak{m}^\varrho$ gehörigem d_ϱ, so ist a in $\mathfrak{R}$ durch b teilbar, $a = b \cdot c$.

2. Anfangsformen und Leitideale; p-Reihenringe.

Es sei $\mathfrak{R}$ wie in Nr. **1** ein Stellenring mit dem maximalen Primideal $\mathfrak{m}$, und es bedeute $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine feste, minimale (d. h. aus möglichst wenig Elementen bestehende) Basis von $\mathfrak{m}$. Mit K möge der Restklassenkörper $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$, mit $\mathfrak{P}$ der Polynomring in n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ über K bezeichnet werden. — Ist nun a irgendein von 0 verschiedenes Element aus $\mathfrak{R}$, so kann a nach Satz 1 nicht in allen Potenzen von $\mathfrak{m}$ enthalten sein, und daraus schließt man mühelos:

Für mindestens ein ϱ kann man eine homogene Form $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vom Grade ϱ in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit nicht durchweg zu $\mathfrak{m}$ gehörigen Koeffizienten c_i aus $\mathfrak{R}$ so bestimmen, daß die Kongruenz $a \equiv \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(\mathfrak{m}^{\varrho+1})$ gilt [14]).

Ersetzt man in $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ die α_i durch die Variabeln x_i und die Koeffizienten c_i durch die zugehörigen Restklassen $\bar{c}_i$ aus K, so entsteht eine von 0 verschiedene Form $\overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$ aus $\mathfrak{P}$, die als *eine Anfangsform* von a bezeichnet werden soll. — Dem Nullelement von $\mathfrak{R}$ rechnen wir in jedem Fall die Anfangsform 0 zu. Es kann aber auch sein, daß das Nullelement von 0 verschiedene Anfangsformen besitzt im gleichen Sinne, wie wir soeben den Begriff der Anfangsform bei einem Element $a \neq 0$ eingeführt haben [15]). Man erkennt ohne Schwierigkeit:

Hat in $\mathfrak{R}$ das Nullelement nur die Anfangsform 0, so besitzt jedes Element von $\mathfrak{R}$ nur eine einzige Anfangsform.

Wir wollen in diesem besonderen Falle $\mathfrak{R}$ aus einem erst später klar werdenden Grunde kurz als *p-Reihenring* bezeichnen.

Aus der Definition der Anfangsform folgt unmittelbar: Ist $\overline{\varphi}(x)$ eine Anfangsform von a, $\overline{\psi}(x)$ eine solche von b, so ist $\overline{\varphi}(x) \cdot \overline{\psi}(x)$ eine solche von $a \cdot b$. Haben ferner $\overline{\varphi}(x)$ und $\overline{\psi}(x)$ denselben Grad ϱ, so wird $\overline{\varphi}(x) + \overline{\psi}(x)$ eine Anfangsform von $a + b$; ist dagegen etwa der Grad von $\overline{\varphi}(x)$ kleiner als der von $\overline{\psi}(x)$, so stellt $\overline{\varphi}(x)$ eine Anfangsform von $a + b$ dar. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich weiter: Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal

---

[14]) Der größte derartige Exponent ϱ ist dadurch gekennzeichnet, daß a zwar in $\mathfrak{m}^\varrho$, aber nicht in $\mathfrak{m}^{\varrho+1}$ liegt.

[15]) Eine Form $\overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grade ϱ ist dann und nur dann Anfangsform des Nullelements, wenn die $\mathfrak{R}$-Elemente $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, aus denen sie nach der im Text beschriebenen Methode erzeugt werden kann, zu $\mathfrak{m}^{\varrho+1}$ gehören.

aus $\mathfrak{R}$, so bildet die Menge aller der Formen $\overline{\varphi}(x)$, die Anfangsformen von Elementen aus $\mathfrak{a}$ sind, in $\mathfrak{P}$ ein Formenideal $\bar{\mathfrak{a}}$[4]). — Wir wollen $\bar{\mathfrak{a}}$ kurz als das *Leitideal* von $\mathfrak{a}$ bezeichnen. Für die Leitideale gelten die folgenden, fast selbstverständlichen Formeln:

$$\bar{\mathfrak{a}} \geqq \bar{\mathfrak{b}}, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}. \tag{1}$$

$$\overline{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \geqq \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}}. \tag{2}$$

$$\bar{\mathfrak{a}} \cap \bar{\mathfrak{b}} \geqq \overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \geqq \overline{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} \geqq \bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{\mathfrak{b}}. \tag{3}$$

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{a}$ *Unterideal von* $\mathfrak{b}$ *und* $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}}$, *so ist stets* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Zum Beweis von Satz 3 hat man in Anbetracht von Satz 1 nur zu zeigen: Ist b ein beliebiges Element von $\mathfrak{b}$, so gehört b für jedes ϱ zu $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^\varrho$. — Induktionsschluß! Man beweise unter der Voraussetzung $b < \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^\varrho$ die Zugehörigkeit von b zu $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{\varrho+1}$! $b < \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^\varrho$ bedeutet die Existenz eines $a < \mathfrak{a}$, für das $b - a = c < \mathfrak{m}^\varrho$. Ist nun sogar $c < \mathfrak{m}^{\varrho+1}$, so ist $b < \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{\varrho+1}$ bereits bewiesen. Gehört aber c nicht zu $\mathfrak{m}^{\varrho+1}$, so besitzt c sicher eine Anfangsform $\overline{\varphi}(x)$ vom Grade ϱ (vgl. Anm. [14])). Aus $c = b - a < \mathfrak{b}$ und $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}}$ folgt nun die Existenz eines Elementes a' aus $\mathfrak{a}$ mit der Anfangsform $\overline{\varphi}(x)$, und aus der Definition der Anfangsform ergibt sich sofort:

$$c - a' < \mathfrak{m}^{\varrho+1}, \quad b - (a + a') < \mathfrak{m}^{\varrho+1}, \quad b < \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{\varrho+1}.$$

Fertig! — Satz 3 läßt sich offenbar auch folgendermaßen aussprechen:

Bilden die Anfangsformen $\overline{\varphi}_i(x)$ *der Elemente* a_i *aus* $\mathfrak{a}$ $(i = 1, \ldots, r)$ *eine Basis von* $\bar{\mathfrak{a}}$, *hat man also* $\bar{\mathfrak{a}} = (\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_r(x))$, *so bilden die Elemente* a_i *selbst eine Basis von* $\mathfrak{a}$, *es wird also* $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$.

Satz 4. *Ist das Leitideal* $\bar{\mathfrak{b}}$ *von* $\mathfrak{b}$ *prim zum Leitideal* $\bar{\mathfrak{a}}$ *von* $\mathfrak{a}$, *so ist auch* $\mathfrak{b}$ *prim zu* $\mathfrak{a}$.

In der Tat, es sei etwa $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a}$, und damit auch $\bar{\mathfrak{c}} \geqq \bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}} \cdot \bar{\mathfrak{c}} \leqq \bar{\mathfrak{a}}$. Wegen $\bar{\mathfrak{a}} : \bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}}$ folgt daraus aber $\bar{\mathfrak{c}} = \bar{\mathfrak{a}}$ und damit $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ nach Satz 3.

Satz 5. *Ist das Leitideal* $\bar{\mathfrak{a}}$ *von* $\mathfrak{a}$ *ein zu* $\overline{\mathfrak{m}} = (x_1, \ldots, x_n)$ *gehöriges Primärideal, so ist* $\mathfrak{a}$ *selbst ein zu* $\mathfrak{m}$ *gehöriges Primärideal* [16]).

Zum Beweis bestimme man ϱ so, daß $\overline{\mathfrak{m}}^\varrho \leqq \bar{\mathfrak{a}}$ wird, und wähle die Elemente a_i mit den Anfangsformen $\overline{\varphi}_i(x)$ $(i = 1, \ldots, r)$ in $\mathfrak{a}$ so, daß die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{m}}^\varrho = (\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_r(x))$$

gilt. Für $\mathfrak{a}' = (a_1, \ldots, a_r)$ hat man dann $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{m}^\varrho$, $\bar{\mathfrak{a}}' = \overline{\mathfrak{m}}^\varrho$, und daraus folgt $\mathfrak{a}' = \mathfrak{m}^\varrho$ nach Satz 3. Es enthält also $\mathfrak{a}$ eine Potenz von $\mathfrak{m}$, und wegen der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{m}$ muß unter diesen Umständen $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal sein.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal, das der Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ genügt, so wird, wie mühelos zu sehen, $\bar{\mathfrak{a}} = \overline{\mathfrak{m}}$ [17]), und damit $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ nach Satz 3. Mit Hilfe dieser Bemerkung zeigt man weiter [18]):

Es sei $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{m}$, und es sei $\beta_i = \sum_{k=1}^{r} c_{ik} \alpha_k$ $(i = 1, \ldots, s)$ eine Darstellung der Elemente β_i durch die Elemente α_i der den bisherigen Betrachtungen zugrunde liegenden Minimalbasis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Versteht man dann unter $\bar{c}_{ik}$ jeweils die durch das Element c_{ik} in K erzeugte Restklasse, so hat die Matrix $\| \bar{c}_{ik} \|$

---

[16]) Diesen Satz bewies Lasker im Potenzreihenfall durch Konvergenzbetrachtungen. Der Beweis des Textes zeigt, in welcher Weise der Durchschnittssatz 1 ein Konvergenzprinzip ersetzt.

[17]) Ist etwa x_1 Anfangsform von $a + b$ $(a < \mathfrak{a}, b < \mathfrak{m}^2)$, so muß x_1 auch Anfangsform von a sein, weil b mindestens eine Anfangsform von höherem als erstem Grade besitzt.

[18]) Zu den folgenden Betrachtungen vgl. die Rechnungen bei W. Schmeidler, Zur Theorie der primären Punktmoduln, Math. Annalen **79** (1918) S. 56—75; W. Krull, Algebraische Theorie der Ringe. II, Math. Annalen **91** (1924) S. 1—46. — In den genannten Arbeiten ersetzt die (natürlich viel schärfere) Voraussetzung, daß eine Potenz von $\mathfrak{m}$ gleich dem Nullideal werden soll, den Durchschnittssatz 1 bzw. den Leitidealsatz 3.

$(i = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, r)$ genau den Rang r, und es wird $\mathfrak{m} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, falls man die Numerierung so wählt, daß die Determinante $|\bar{c}_{ik}|$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ von 0 verschieden ausfällt. Eine Basis von $\mathfrak{m}$, in der kein Element einfach weggelassen werden kann, ist also stets eine Minimalbasis von der Gliederzahl r.

Würde man die Anfangsformen der Elemente und die Leitideale der Ideale von $\mathfrak{R}$ statt mit Hilfe der bisher benutzten Minimalbasis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ mit Hilfe irgendeiner andern Minimalbasis $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ berechnen $(\beta_i = \sum_{k=1}^{r} c_{ik}\,\alpha_k;\ i, k = 1, \ldots, r;\ |\bar{c}_{ik}| \neq 0)$, so würde das nichts anderes bedeuten, als einen Übergang zu neuen Variabeln mit Hilfe der linearen homogenen Transformation $y_i = \sum_{k=1}^{r} \bar{c}_{ik}\, x_k$ $(i = 1, \ldots, r)$ im Polynomring $\mathfrak{P}$. Diese Bemerkung zeigt, *daß alle unsere Definitionen und Sätze unabhängig sind von der speziellen Wahl der zur Einführung von Anfangsformen und Leitidealen benutzten Minimalbasis*; wir können und wollen uns daher durchweg auf das Arbeiten mit der festen Minimalbasis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ beschränken.

Zum Schluß der Nummer einige Bemerkungen über p-Reihenringe. Aus der Tatsache, daß im p-Reihenring $\mathfrak{R}$ das Produkt *der* Anfangsform von a mit *der* Anfangsform von b stets gleich *der* Anfangsform von $a \cdot b$ ist, und aus der Nullteilerfreiheit des Formenrings $\mathfrak{P}$ folgt sofort:

Ein p-Reihenring ist stets ein Integritätsbereich.

Bezeichnet man ferner im p-Reihenring $\mathfrak{R}$ den Grad der Anfangsform von a kurz als den *Anfangsgrad* von a, so hat man den Satz, daß der Anfangsgrad des Produktes immer gleich der Summe der Anfangsgrade der Faktoren ist, und man sieht, daß der Anfangsgrad ϱ von a dadurch gekennzeichnet ist, daß a zwar noch zu $\mathfrak{m}^\varrho$, aber nicht mehr zu $\mathfrak{m}^{\varrho+1}$ gehört.

Wesentlich wichtiger als diese selbstverständlichen Bemerkungen ist

Satz 6. *Ein p-Reihenring $\mathfrak{R}$ ist immer in seinem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ ganz abgeschlossen.*

Es sei $\pi = \frac{p}{q}$ (p und q in $\mathfrak{R}$) ein von $\mathfrak{R}$ ganz abhängiges Element aus $\mathfrak{K}$. Wir haben zu beweisen, daß p in $\mathfrak{R}$ durch q teilbar ist, und zu diesem Zweck brauchen wir nach den Zusatzbemerkungen zu Satz 2 nur zu zeigen, daß aus der Teilbarkeit von p durch q modulo $\mathfrak{m}^\varrho$ die Teilbarkeit von p durch q modulo $\mathfrak{m}^{\varrho+1}$ folgt. — Ist $p < (q) + \mathfrak{m}^\varrho$, so gibt es in $\mathfrak{R}$ ein q', für das $p - q \cdot q' = r < \mathfrak{m}^\varrho$ wird, und es hängt gleichzeitig mit π auch $\pi' = \pi - q' = \frac{r}{q}$ von $\mathfrak{R}$ ganz ab. Man kann daher ein $a \neq 0$ in $\mathfrak{R}$ so bestimmen, daß $a \cdot \pi'^n$ für jedes ganze positive n zu $\mathfrak{R}$ gehört, daß also stets $a \cdot r^n$ durch q^n teilbar ist. Geht man nun von den Elementen a, r, q zu ihren Anfangsformen $\bar{\nu}(x), \bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)$ über, so muß $\bar{\nu}(x) \cdot \bar{\varphi}(x)^n$ immer durch $\bar{\psi}(x)^n$ teilbar sein, und daraus folgt in $\mathfrak{P}$ die Teilbarkeit von $\bar{\varphi}(x)$ durch $\bar{\psi}(x)$, es wird also $\bar{\varphi}(x) = \bar{\psi}(x) \cdot \bar{\chi}(x)$. Ist q'' ein Element aus $\mathfrak{R}$ mit der Anfangsform $\bar{\chi}(x)$, so haben r und qq'' die gleiche Anfangsform, und es liegt infolgedessen wegen $r < \mathfrak{m}^\varrho$ das Element $s = r - q \cdot q''$ sicher in $\mathfrak{m}^{\varrho+1}$, d. h. es ist $p = q(q' + q'') + s$ modulo $\mathfrak{m}^{\varrho+1}$ durch q teilbar. Fertig!

3. Die Dimensionssätze.

Dem Primideal $\mathfrak{p}$ aus dem beliebigen Ringe $\mathfrak{R}$ schreiben wir die *Dimension* (den *Dimensionsdefekt*) μ zu, wenn es in $\mathfrak{R}$ mindestens eine $(\mu + 1)$-gliedrige, aber keine $(\mu + 2)$-gliedrige Primoberidealkette $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < \cdots$ (Primunteridealkette $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2 > \cdots$) gibt. Von einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ sagen wir, es habe die Dimension μ, wenn unter den Primoberidealen von $\mathfrak{a}$ mindestens eine die Dimension μ, kein einziges aber eine Dimen-

sion $\nu > \mu$ oder überhaupt keine endliche Dimension besitzt. Diese Definitionen werden durch ihre Brauchbarkeit in der Theorie der Polynom- und Potenzreihenringe gerechtfertigt [19]).

Für einen Stellenring gilt offenbar der Satz:

Hat das maximale Primideal $\mathfrak{m}$ *des Stellenrings* $\mathfrak{R}$ *den endlichen Dimensionsdefekt* ν, *so haben alle Primideale von* $\mathfrak{R}$ *endliche Dimensionen und endliche Dimensionsdefekte mit der oberen Schranke* ν.

Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß jede Primoberidealkette „umgedreht" eine Primunteridealkette liefert, und daß aus einer μ-gliedrigen, mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ beginnenden Primunteridealkette stets durch „Vorschaltung" von $\mathfrak{m}$ eine $(\mu + 1)$-gliedrige, mit $\mathfrak{m}$ beginnende Primunteridealkette abgeleitet werden kann.

Von grundlegender Bedeutung für die Dimensionstheorie in Stellenringen sind die folgenden beiden Hauptsätze:

Satz 7. *In einem beliebigen Stellenring* $\mathfrak{R}$ *hat das maximale Primideal* $\mathfrak{m}$ *stets einen endlichen Dimensionsdefekt* ν, *und zwar ist* ν *höchstens gleich* r, *falls sich* r *Elemente* $a_1, \ldots, a_r$ *so bestimmen lassen, daß* $(a_1, \ldots, a_r)$ *ein zu* $\mathfrak{m}$ *gehöriges Primärideal wird.*

Satz 8. *Die Dimension eines beliebigen Ideals* $\mathfrak{a}$ *aus dem Stellenring* $\mathfrak{R}$ *ist stets gleich der Dimension des zugehörigen Leitideals* $\bar{\mathfrak{a}}$.

Den Beweis für Satz 7 habe ich bereits früher an anderer Stelle erbracht [2]); ich werde ihn aber, um in der vorliegenden Arbeit keine Lücke zu lassen, in Nr. 7 nochmals kurz darstellen.

Es sei nun $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus dem Stellenring $\mathfrak{R}$ von der Dimension μ, und es bedeute $\bar{\mu}$ die Dimension des zugehörigen Leitideals $\bar{\mathfrak{a}}$. Dann kann man jedenfalls in $\mathfrak{P}$ die homogenen Formen $\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_{\bar{\mu}}(x)$ so bestimmen, daß

$$\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{a}} + (\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_{\bar{\mu}}(x))$$

nulldimensional und damit ein zu $\overline{\mathfrak{m}}$ gehöriges Primärideal wird. Wählt man ferner in $\mathfrak{R}$ die Elemente a_i so, daß jeweils $\overline{\varphi}_i(x)$ eine Anfangsform von a_i darstellt $(i = 1, \ldots, \bar{\mu})$, so wird das Leitideal $\bar{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (a_1, \ldots, a_{\bar{\mu}})$ ein Oberideal von $\bar{\mathfrak{q}}$, und damit ein zu $\overline{\mathfrak{m}}$ gehöriges Primärideal, nach Satz 5 muß also $\mathfrak{b}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal sein. D. h. aber: Im Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ gibt es ein zum maximalen Primideal $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ gehöriges Primärideal mit $\bar{\mu}$-gliedriger Basis (nämlich $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$), und es kann infolgedessen $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ nach Satz 7 in $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ höchstens den Dimensionsdefekt $\bar{\mu}$ besitzen. Daraus ergibt sich für die Dimension μ von $\mathfrak{a}$ die Ungleichung $\mu \leqq \bar{\mu}$, denn ein beliebiges Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ hat in $\mathfrak{R}$ offenbar genau dieselbe Dimension wie das Primideal $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$, und die Dimension von $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ kann nach einer oben gemachten Bemerkung niemals größer sein als der Dimensionsdefekt von $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$.

Beim Beweis, daß auch umgekehrt $\mu \geqq \bar{\mu}$ sein muß, stützen wir uns auf den folgenden Hilfssatz, dessen Beweis in Nr. 4 im Rahmen allgemeinerer Leitidealuntersuchungen nachgetragen werden soll:

---

[19]) Vgl. z. B. W. Krull, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math. Zeitschrift **42** (1937), S. 745—766. Die dort in Nr. 4 und 5 aufgestellten Sätze gelten, wie mühelos zu sehen, auch für den Bereich aller *Formenideale* des Polynomrings $\mathfrak{P}$. (Die Betrachtung von Formenidealen ist ja gleichwertig mit der Betrachtung von gewöhnlichen Polynomidealen unter der einschränkenden Voraussetzung, daß nur solche Ideale zugelassen werden sollen, die eine aus homogenen Formen bestehende Basis besitzen.) — Man beachte, daß nach unsern Festsetzungen die maximalen Primideale immer die Dimension 0 besitzen, auch im Formenidealbereich von $\mathfrak{P}$, wo $(x_1, \ldots, x_n)$ das einzige maximale Primideal darstellt. — Gibt es für die Gliederzahl der mit $\mathfrak{p}$ beginnenden Primoberidealketten (Primunteridealketten) keine endliche Schranke, so hat man dem Primideal $\mathfrak{p}$ die Dimension (den Dimensionsdefekt) „unendlich" zuzuschreiben.

Zu jedem Ideal $\mathfrak{c}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *mit positiv-dimensionalem Leitideal* $\bar{\mathfrak{c}}$ *läßt sich ein Oberideal* $\mathfrak{d}$ *so bestimmen, daß die Dimension des Leitideals* $\bar{\mathfrak{d}}$ *von* $\mathfrak{d}$ *um genau eine Einheit niedriger ist, als die Dimension von* $\bar{\mathfrak{c}}$.

Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die sämtlichen minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$. Dann ist $(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r)^s \leqq \mathfrak{a}$ für hinreichend großes s, und daraus folgt nach den Leitidealformeln (1) und (3) von Nr. 2 sofort $(\bar{\mathfrak{p}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{p}}_r)^s \leqq \bar{\mathfrak{a}}$. Es muß daher mindestens eines der Leitideale $\bar{\mathfrak{p}}_i$, etwa $\bar{\mathfrak{p}}_1$, dieselbe Dimension $\bar{\mu}$ besitzen wie $\bar{\mathfrak{a}}$. Bedeutet ferner $\mathfrak{a}'$ ein nach dem Hilfssatz sicher vorhandenes Oberideal von $\mathfrak{p}_1$ mit genau $(\bar{\mu}-1)$-dimensionalem Leitideal, so zeigen die gleichen Schlüsse, wie wir sie soeben auf $\mathfrak{a}$ anwandten, daß es ein $\mathfrak{a}'$ und damit auch $\mathfrak{p}_1$ enthaltendes Primideal $\mathfrak{p}_1'$ mit genau $(\bar{\mu}-1)$-dimensionalem Leitideal geben muß. Ist schließlich $\bar{\mu}-1>0$, so kann man durch Wiederholung der bereits gemachten Überlegungen die Existenz eines Primoberideals $\mathfrak{p}_1''$ von $\mathfrak{p}_1'$ mit genau $(\bar{\mu}-2)$-dimensionalem Leitideal nachweisen, usw. D. h. aber: Mindestens ein Primoberideal $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{a}$ besitzt mindestens die Dimension $\bar{\mu}$. Es muß also notwendig $\mu \geqq \bar{\mu}$ sein, und da $\mu \leqq \bar{\mu}$ bereits bewiesen war, hat man, wie in Satz 7 behauptet, $\mu = \bar{\mu}$. Aus Satz 8 folgt insbesondere

Satz 9. *Ist im Stellenring* $\mathfrak{R}$ *das Primideal* $\mathfrak{p}'$ *echtes Oberideal des Primideals* $\mathfrak{p}$, *so ist die Dimension des Leitideals* $\bar{\mathfrak{p}}'$ *stets kleiner als die Dimension des Leitideals* $\bar{\mathfrak{p}}$. — *Zwei zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärideale sind stets gegenseitig prim, wenn ihre Leitideale dieselbe Dimension haben.*

(Beim Beweis des zweiten Teiles von Satz 9 hat man nur zu beachten, daß ein Primärideal offenbar stets dieselbe Dimension besitzt wie sein zugehöriges Primideal.) — Das Ideal $\mathfrak{a}$ soll wie üblich *ungemischt* μ*-dimensional* heißen, wenn $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt endlich vieler, durchweg μ-dimensionaler Primärideale darstellbar ist.

Satz 10. *Ist im Stellenring* $\mathfrak{R}$ *das Leitideal* $\bar{\mathfrak{a}}$ *von* $\mathfrak{a}$ *ungemischt* μ*-dimensional, so ist auch* $\mathfrak{a}$ *selbst ungemischt* μ*-dimensional.*

In der Tat, es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ irgend eine Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{a}$ durch Primärideale $\mathfrak{q}_i$, und es sei etwa $\mathfrak{q}_r$ von einer Dimension $\nu < \mu$. Dann ist nach Satz 8 auch das Leitideal $\bar{\mathfrak{q}}_r$ ν-dimensional und infolgedessen zu dem ungemischt μ-dimensionalen Leitideal $\bar{\mathfrak{a}}$ prim, $\bar{\mathfrak{a}} : \bar{\mathfrak{q}}_r = \bar{\mathfrak{a}}$. Daraus folgt aber nach Satz 4 von Nr. 2 weiter

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_r = (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_r) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_{r-1} : \mathfrak{q}_r) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r-1};$$

die nicht genau μ-dimensionalen Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$ können also in der Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ einfach weggelassen werden.

Auf Satz 10 stützt sich ein dritter grundlegender Dimensionssatz, der als wichtige Ergänzung neben die beiden Dimensionssätze 7 und 8 tritt:

Satz 11. *In einem p-Reihenring* $\mathfrak{R}$ *hat bei jedem Primideal* $\mathfrak{p}$ *die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt denselben festen Wert, und zwar ist sie gleich der Gliederzahl* n *einer Minimalbasis des maximalen Primideals* $\mathfrak{m}$.

Unmittelbar aus den einschlägigen Definitionen folgt, daß die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt eines beliebigen Primideals $\mathfrak{p}$ niemals größer sein kann als die Dimension des Nullideals, das ja bei einem p-Reihenring auch zu den Primidealen gehört. Andrerseits ergibt sich aus Satz 7, daß die Dimension des Nullideals höchstens gleich n ist. Unter diesen Umständen brauchen wir zum Beweise von Satz 11 nur zu zeigen:

Ist $\mathfrak{p}$ *ein Primideal aus* $\mathfrak{R}$ *von einer Dimension* $\mu < n$, *so besitzt* $\mathfrak{p}$ *stets ein* $(\mu+1)$*-dimensionales Primunterideal.*

Hat $\mathfrak{p}$ die Dimension μ in $\mathfrak{R}$, so hat nach Satz 8 auch das Leitideal $\bar{\mathfrak{p}}$ die Dimension μ in $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, und daraus schließt man leicht: Man kann in $\bar{\mathfrak{p}}$ die Formen $\overline{\varphi}_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n - \mu - 1)$ so wählen, daß das Ideal $(\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_i(x))$ jeweils genau die Dimension $n - i$ besitzt. Es ist dann nach einem bekannten Laskerschen Satz $(\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_i(x))$ für $i = 1, \ldots, n - \mu - 1$ stets ungemischt i-dimensional, und daraus folgt weiter, daß $\overline{\varphi}_i(x)$ stets prim zu $(\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_{i-1}(x))$ sein muß [20]). — Aus diesen Bemerkungen und der Tatsache, daß das Nullideal des p-Reihenrings $\mathfrak{R}$ das Nullideal von $\mathfrak{P}$ zum Leitideal besitzt, ergibt sich aber, wie im Laufe der Leitidealuntersuchungen von Nr. 4 gezeigt werden wird:

Wählt man in $\mathfrak{p}$ die Elemente $a_1, \ldots, a_{n-\mu-1}$ so, daß $\overline{\varphi}_i(x)$ jeweils die Anfangsform von a_i darstellt, so besitzt $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_{n-\mu-1})$ genau das Leitideal

$$\bar{\mathfrak{a}} = (\overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_{n-\mu-1}(x)).$$

Nach Satz 10 ist $\mathfrak{a}$ gleichzeitig mit $\bar{\mathfrak{a}}$ ungemischt $(\mu + 1)$-dimensional, es hat also jedes minimale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ genau die Dimension $\mu + 1$. Wegen $\mathfrak{a} < \mathfrak{p}$ enthält aber $\mathfrak{p}$ mindestens ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$. Fertig!

4. Feinere Leitidealsätze.

Das Hauptziel der folgenden Betrachtungen ist die Ausfüllung der Lücken, die bei den Beweisen der Sätze 8 und 11 in Nr. 3 gelassen wurden. Unter dem *Anfangsgrad* eines Elementes $a \neq 0$ aus dem Stellenring $\mathfrak{R}$ verstehen wir den Exponenten ϱ der höchsten Potenz des maximalen Primideals $\mathfrak{m}$, die a gerade noch enthält, d. h. den gemeinsamen Grad aller der Anfangsformen von a, die nicht gleichzeitig Anfangsformen des Nullelements sind [21]).

Satz 12. *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus dem Stellenring $\mathfrak{R}$, und bedeutet q ein Element aus $\mathfrak{R}$, das eine zum Leitideal $\bar{\mathfrak{a}}$ prime Anfangsform $\overline{\varphi}(x)$ besitzt, so gilt für das Leitideal $\bar{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (q)$ die Gleichung*

$$\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} + (\overline{\varphi}(x))\,[22]).$$

Es sei ϱ der Grad von $\overline{\varphi}(x)$ und damit der Anfangsgrad von q. Alle durch einen * ausgezeichneten Elemente sollen zu $\mathfrak{a}$ gehören. — Ein beliebiges Element b aus $\mathfrak{b}$ hat stets die Gestalt $b = a^* + q \cdot r$. Ist dabei der Anfangsgrad von b kleiner als ϱ, so ist er offenbar gleich dem Anfangsgrad von a^*, und es haben b und a^* genau dieselben, durchweg zu $\bar{\mathfrak{a}}$ gehörigen Anfangsformen. Wir brauchen daher nur noch den Fall zu untersuchen, daß der Anfangsgrad von $a^* + q \cdot r$ gleich $\varrho + \sigma$ mit $\sigma \geqq 0$ ist.

Hilfsbehauptung. Ist $a^* + q \cdot r < \mathfrak{m}^{\varrho+\mu}$ $(\mu \geqq 0)$, so gibt es stets ein r^* derart, daß $r - r^* < \mathfrak{m}^{\mu}$ wird.

Für $\mu = 0$ ist die Hilfsbehauptung selbstverständlich. Bei ihrem Beweise für $\mu > 0$ dürfen wir daher ihre Richtigkeit für $\mu - 1$ voraussetzen, d. h. wir dürfen annehmen, daß eine Gleichung $r = t^* + s$ mit $s < \mathfrak{m}^{\mu-1}$ gilt, falls $a^* + q \cdot r < \mathfrak{m}^{\varrho+\mu}$ und damit erst recht $a^* + q \cdot r < \mathfrak{m}^{\varrho+\mu-1}$ ist. Für $b^* = a^* + q \cdot t^*$ haben wir dann

$$b^* + q \cdot s < \mathfrak{m}^{\varrho+\mu},\ b^* < \mathfrak{m}^{\varrho+\mu-1}.$$

Unter diesen Umständen besitzt aber s bzw. b^* eine Anfangsform $\overline{\psi}(x)$ bzw. $\overline{\chi}(x)$ vom

---

[20]) Ein sehr einfacher Beweis des Laskerschen Ungemischtheitssatzes findet sich in B. L. van der Waerden, Moderne Algebra **2** (Berlin 1931), § 95.

[21]) Im Spezialfall eines p-Reihenringes deckt sich diese Anfangsgraddefinition mit der Anfangsgraddefinition von Nr. 2.

[22]) Für gewöhnliche Potenzreihenringe findet sich dieser Satz (sogar in etwas verallgemeinerter Fassung) bereits bei Lasker. Der Laskersche Beweis kann unmittelbar auf beliebige p-Reihenringe übertragen werden. Der allgemein gültige Beweis des Textes ist aber auch in diesem Spezialfall einfacher.

Grade $\mu - 1$ bzw. $\varrho + \mu - 1$ [23]), und aus $b^* + q \cdot s < \mathfrak{m}^{\varrho+\mu}$ folgt, daß

$$\bar{\omega}(x) = \bar{\chi}(x) + \bar{\varphi}(x)\,\bar{\psi}(x)$$

eine Anfangsform des Nullelements sein muß. Wir haben also

$$\bar{\varphi}(x)\,\bar{\psi}(x) = \bar{\omega}(x) - \bar{\chi}(x) < \bar{\mathfrak{a}}$$

und damit auch $\bar{\psi}(x) < \bar{\mathfrak{a}}$ wegen $\bar{\mathfrak{a}} : (\bar{\varphi}(x)) = \bar{\mathfrak{a}}$. Es gibt infolgedessen ein s^* mit der Anfangsform $\bar{\psi}(x)$, und es wird offenbar

$$s^* - s < \mathfrak{m}^{\mu},\ r - r^* < \mathfrak{m}^{\mu} \text{ für } r^* = t^* + s^*.$$

Die Hilfsbehauptung ist also für jedes $\mu \geqq 0$ richtig; insbesondere gilt sie für $\mu = \sigma$, falls $\varrho + \sigma$ der Anfangsgrad von $a^* + q \cdot r$ ist. Es sei nun r^* so gewählt, daß $s = r - r^* < \mathfrak{m}^{\sigma}$ wird. Dann besitzt s bzw. $b^* = a^* + q \cdot r^*$ eine Anfangsform $\bar{\psi}(x)$ bzw. $\bar{\chi}(x)$ vom Grade σ bzw. $\varrho + \sigma$, und es wird

$$\bar{\omega}(x) = \bar{\chi}(x) + \bar{\varphi}(x)\,\bar{\psi}(x)$$

eine zu $\bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}(x))$ gehörige Anfangsform von $a^* + q \cdot r = b^* + q \cdot s$, die nicht gleichzeitig Anfangsform des Nullelements ist. — Damit ist gezeigt, daß

$$\bar{\mathfrak{b}} \leqq \bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}(x))$$

sein muß [24]). Da andrerseits jedenfalls $\bar{\mathfrak{b}} \geq \bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}(x))$ ist (Formel (1) von Nr. 2), haben wir $\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}(x))$, wie zu beweisen war.

Die Brauchbarkeit von Satz 12 wird dadurch beeinträchtigt, daß es in $\mathfrak{P}$ Formenideale gibt, zu denen die sämtlichen Formen positiven Grades nicht prim sind, nämlich alle und nur die Formenideale, die eine zu $\overline{\mathfrak{m}} = (x_1, \ldots, x_n)$ gehörige Primärkomponente besitzen. Wir werden daher Satz 12 noch verschärfen. Dabei bedienen wir uns der folgenden Abkürzung:

Ist $\bar{\mathfrak{a}}$ ein beliebiges Ideal, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(x)$ eine beliebige Form aus $\mathfrak{P}$, so soll $\bar{\mathfrak{a}}_{\bar{\tau}}$ das Ideal aller der Formen bezeichnen, die durch Multiplikation mit geeigneten Potenzen von $\bar{\tau}$ in Elemente von $\bar{\mathfrak{a}}$ verwandelt werden können. $\bar{\mathfrak{a}}_{\bar{\tau}}$ ist in Noetherscher Bezeichnungsweise ein „isoliertes Komponentenideal" von $\bar{\mathfrak{a}}$. Kennt man eine Primärkomponentenzerlegung $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_m$, so erhält man $\bar{\mathfrak{a}}_{\bar{\tau}}$ einfach dadurch, daß man in der gegebenen Zerlegung alle die Primärkomponenten $\bar{\mathfrak{q}}_i$ wegläßt, die eine Potenz von $\bar{\tau}$ enthalten [25]). Eine beliebige Form $\bar{\varphi}(x)$ ist zu $\bar{\mathfrak{a}}_{\bar{\tau}}$ offenbar dann und nur dann prim, wenn aus $\bar{\varphi}(x)\,\bar{\psi}(x) < \bar{\mathfrak{a}}$ stets $\bar{\psi}(x)\,\bar{\tau}(x)^e < \bar{\mathfrak{a}}$ für hinreichend großes e folgt. — Die in Frage stehende Verallgemeinerung von Satz 12 lautet nun:

Satz 13. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(x)$ eine beliebige Form aus $\mathfrak{P}$; bedeutet dann q irgendein Element aus $\mathfrak{R}$, das eine zu $\bar{\mathfrak{a}}_{\bar{\tau}}$ prime Anfangsform $\bar{\varphi}(x)$ besitzt, so gilt für das Leitideal $\bar{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (q)$ stets die Gleichung*

$$\bar{\mathfrak{b}}_{\bar{\tau}} = (\bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}(x)))_{\bar{\tau}}.$$

Der Beweis wird nach genau den gleichen Richtlinien geführt wie der Beweis von Satz 12. Wir können uns daher darauf beschränken, diejenigen Stellen hervorzuheben, an denen die früheren Überlegungen verschärft werden müssen. Es sei π der Anfangsgrad von $\bar{\tau}(x)$, während ϱ wie früher den Anfangsgrad von $\bar{\varphi}(x)$ bedeuten soll. c sei irgendein Element aus $\mathfrak{R}$ mit der Anfangsform $\bar{\tau}(x)$. — Wie bei der früheren Hilfsbehauptung sei $a^* + q \cdot r < \mathfrak{m}^{\varrho+\mu}$ $(\mu > 0)$, und es werde diesmal vorausgesetzt, daß für hinreichend

[23]) Möglicherweise ist eine dieser Anfangsformen gleich Null zu setzen, z. B. dann, wenn s einen Anfangsgrad $\nu > \mu - 1$ besitzt.

[24]) Man beachte: Enthält $\bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}(x))$ eine Anfangsform $\bar{\psi}(x)$ von b, die nicht gleichzeitig Anfangsform des Nullelements ist, so enthält $\bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}(x))$ auch alle übrigen Anfangsformen von b, weil diese letzteren entweder selbst Anfangsformen des Nullelements sind oder sich von $\bar{\psi}(x)$ nur um Anfangsformen des Nullelements unterscheiden.

[25]) Zum Begriff des isolierten Komponentenideals vgl. z. B. Idealbericht, Nr. 6.

großes $\varkappa$ ein t^* so bestimmt werden kann, daß

$$c^\varkappa \cdot r = t^* + s,\ s < \mathfrak{m}^{\varkappa\pi+\mu-1}$$

wird. Bezeichnet dann $\overline{\psi}(x)$ bzw. $\overline{\chi}(x)$ eine Anfangsform von s bzw. $c^\varkappa \cdot a^* + q \cdot t^* = b^*$ vom Grade $\varkappa\pi + \mu - 1$ bzw. $\varkappa\pi + \mu + \varrho - 1$, so wird $\overline{\chi}(x) + \overline{\varphi}(x)\,\overline{\psi}(x)$ wegen $b^* + q \cdot s < \mathfrak{m}^{\varkappa\pi+\mu+\varrho}$ eine Anfangsform des Nullideals, und infolgedessen

$$\overline{\varphi}(x)\,\overline{\psi}(x) < \bar{\mathfrak{a}},\ \overline{\psi}(x)\,\overline{\tau}(x)^{\varkappa'} < \bar{\mathfrak{a}} \text{ für hinreichend großes } \varkappa'.$$

Für $\lambda = \varkappa + \varkappa'$ gibt es daher ein s^* derart, daß $s^* - c^{\varkappa'} \cdot s < \mathfrak{m}^{\lambda\pi+\mu}$, und man erhält schließlich

$$c^\lambda \cdot r - r^* < \mathfrak{m}^{\lambda\pi+\mu}\ (r^* = c^{\varkappa'} \cdot t^* + s^*).$$

Es sei nun $\varrho + \sigma$ ($\sigma \geqq 0$) der Anfangsgrad von $a^* + q \cdot r$, und es seien λ und r^* so bestimmt, daß $c^\lambda \cdot r - r^* < \mathfrak{m}^{\lambda\pi+\sigma}$. Dann hat

$$c^\lambda \cdot (a^* + q \cdot r) = (c^\lambda \cdot a^* + q \cdot r^*) + q \cdot (r - r^*)$$

eine zu $\bar{\mathfrak{a}} + (\overline{\varphi}(x))$ gehörige Anfangsform $\overline{\omega}(x)$ vom Grade $\lambda\pi + \varrho + \sigma$. Bedeutet andrerseits $\overline{\pi}(x)$ eine Anfangsform von $a^* + q \cdot r$ vom Grade $\varrho + \sigma$, so muß auch $\overline{\tau}(x)^\lambda \cdot \overline{\pi}(x)$ eine Anfangsform von $c^\lambda \cdot (a^* + q \cdot r)$ sein, es wird also $\overline{\omega}(x) - \overline{\tau}(x)^\lambda \cdot \overline{\pi}(x)$ eine Anfangsform des Nullelements, und daraus folgt sofort

$$\overline{\tau}(x)^\lambda \cdot \overline{\pi}(x) < \bar{\mathfrak{a}} + (\overline{\varphi}(x)),\ \overline{\pi}(x) < (\bar{\mathfrak{a}} + (\overline{\varphi}(x)))_{\bar{\tau}}.$$

Aus Satz 13 folgt leicht der in Nr. **3** bei Satz 8 unbewiesen benutzte Hilfssatz, und zwar in verschärfter Fassung:

Es sei $\mathfrak{a}$ *ein Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *mit* μ*-dimensionalem Leitideal* $\bar{\mathfrak{a}}$ $(\mu > 1)$. *Ist dann* a *irgendein Element, das eine Anfangsform* $\overline{\varphi}(x)$ *besitzt, die in keinem zu* $\bar{\mathfrak{a}}$ *gehörigen* [23]), *von* $\overline{\mathfrak{m}}$ *verschiedenen Primideal vorkommt, so hat das Leitideal* $\bar{\mathfrak{b}}$ *von* $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (a)$ *genau die Dimension* $\mu - 1$.

In der Tat, aus der Theorie der Polynomringe folgt sofort, daß jedenfalls $\bar{\mathfrak{a}} + (\overline{\varphi}(x)) = \bar{\mathfrak{c}}$ genau $(\mu - 1)$-dimensional ist [27]). Gehört nun $\overline{\mathfrak{m}}$ selbst nicht zu $\bar{\mathfrak{a}}$, so ist $\overline{\varphi}(x)$ unter unsern Voraussetzungen zu $\bar{\mathfrak{a}}$ prim, und man hat nach Satz 12 unmittelbar $\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{c}}$. Gehört aber $\overline{\mathfrak{m}}$ zu $\bar{\mathfrak{a}}$, so bestimme man $\overline{\tau} = \overline{\tau}(x)$ so, daß $\overline{\tau}(x)$ in keinem zu $\bar{\mathfrak{a}}$ oder $\bar{\mathfrak{c}}$ gehörigen, von $\overline{\mathfrak{m}}$ verschiedenen Primideal vorkommt. Dann ist einerseits $\overline{\varphi}(x)$ zu $\bar{\mathfrak{a}}_{\bar{\tau}}$ prim, es wird also nach Satz 14 sicher $\bar{\mathfrak{b}}_{\bar{\tau}} = \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{\tau}}$ und damit $\bar{\mathfrak{b}} \leqq \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{\tau}}$; andrerseits hat $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{\tau}}$ ebenso wie $\bar{\mathfrak{c}}$ selbst die Dimension $\mu - 1$, weil jedes zu $\bar{\mathfrak{c}}$ gehörige, von $\overline{\mathfrak{m}}$ verschiedene Primideal, und damit insbesondere jedes genau $(\mu - 1)$-dimensionale Primoberideal von $\bar{\mathfrak{c}}$ auch zu $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{\tau}}$ gehören muß.

Auch die bei Satz 11 gelassene Beweislücke kann jetzt mühelos ausgefüllt werden. Es sei $\mathfrak{p}$ ein μ-dimensionales Primideal im p-Reihenring $\mathfrak{R}$, wobei nur der Fall $\mu \leqq n - 2$ zu berücksichtigen ist, falls n die Dimension des Nullideals bedeutet. Ist nun $a_1 \neq 0$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}$ mit der Anfangsform $\overline{\varphi}_1(x)$, so wird wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Anfangsform sicher $\overline{(a_1)} = (\overline{\varphi}_1(x))$ und damit ungemischt $(n - 1)$-dimensional. Man wähle nun weiter a_2 in $\mathfrak{p}$ so, daß die Anfangsform $\overline{\varphi}_2(x)$ von a_2 in keinem der endlich vielen $(n - 1)$-dimensionalen Primoberideale von $(\overline{\varphi}_1(x))$ vorkommt. Eine derartige Wahl ist sicher möglich, weil $\overline{\mathfrak{p}}$ ebenso wie $\mathfrak{p}$ die Dimension $\mu \leqq n - 2$ besitzt und mithin in keinem $(n - 1)$-dimensionalen Primideal enthalten sein kann. Wegen der Ungemischtheit von $(\overline{\varphi}_1(x))$ ist $\overline{\varphi}_2(x)$ zu $(\overline{\varphi}_1(x)) = \overline{(a_1)}$ prim, und aus Satz 12 folgt somit $\overline{(a_1, a_2)} = (\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x))$. Unter diesen Umständen ist aber $\overline{(a_1, a_2)}$ ungemischt $(n - 2)$-dimensional, und falls $\mu \leqq n - 3$ und damit $\overline{\mathfrak{p}}$ in keinem $(n - 2)$-dimen-

[26]) Ein Primideal $\overline{\mathfrak{p}}$ heißt bekanntlich „zu $\bar{\mathfrak{a}}$ gehörig", wenn bei einer (und damit bei jeder) unverkürzbaren Primärkomponentenzerlegung $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \ldots \cap \bar{\mathfrak{q}}_s$ von $\bar{\mathfrak{a}}$ mindestens eines der Primärideale $\bar{\mathfrak{q}}_i$ zu $\overline{\mathfrak{p}}$ gehört.

[27]) Vgl. hierzu z. B. Nr. 5 der in Anm. [19]) zitierten Arbeit.

sionalen Primideal enthalten sein sollte, ergibt sich durch die gleichen Überlegungen, wie sie beim Übergang von (a_1) zu (a_1, a_2) benutzt werden, daß in $\mathfrak{p}$ ein a_3 mit der Anfangsform $\overline{\varphi}_3(x)$ existiert, für das $\overline{(a_1, a_2, a_3)} = (\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), \overline{\varphi}_3(x))$ ungemischt $(n-3)$-dimensional wird. Das Verfahren kann offenbar bis zur Bildung eines in $\mathfrak{p}$ enthaltenen Ideals $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-\mu})$ mit ungemischt $(n-\mu)$-dimensionalem Leitideal

$$(\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), \ldots, \overline{\varphi}_{n-\mu}(x))$$

fortgesetzt werden, und das ist sogar noch eine Kleinigkeit mehr als wir beim Beweise von Satz 11 brauchten.

5. Formale Potenzreihenentwicklungen.

Bei den Untersuchungen von Nr. 1—Nr. 4 benutzten wir als einziges rechnerisches Hilfsmittel den Begriff der Anfangsform. Zur besseren Veranschaulichung der gewonnenen Ergebnisse sollen jetzt noch die bereits in der Einleitung erwähnten *Potenzreihenentwicklungen* für die Elemente eines beliebigen Stellenringes $\mathfrak{R}$ eingeführt werden. Wie bisher sei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine Minimalbasis des maximalen Primideals $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{R}$; unter K wollen wir ein „volles Restsystem von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{m}$" verstehen, d. h. eine Untermenge von $\mathfrak{R}$, die aus jeder Restklasse von $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ genau einen Repräsentanten enthält. $\varphi_r(\alpha)$ ($\psi_s(\alpha), \ldots$) bedeute eine homogene Funktion r-ten (s-ten, ...) Grades in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit Koeffizienten aus K.

Kann man K hinsichtlich der Addition und Multiplikation abgeschlossen wählen, so stellt K einen zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ isomorphen Körper dar, und es enthält das System P aller Formen $\varphi_r(\alpha)$ gleichzeitig mit zwei Formen stets auch ihr Produkt, sowie bei Gradgleichheit ihre Summe. In diesem einfachsten Fall werden wir auf gewöhnliche Potenzreihen kommen, während wir im allgemeinen auf solche Entwicklungen stoßen werden, wie sie in der Henselschen Theorie der p-adischen Zahlen (oder auch in der Theorie der diskret bewerteten Körper) auftreten.

Die formell gebildete unendliche Summe

$$\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \cdots \qquad (\varphi_i(\alpha) \leq P(i = 0, 1, 2, \ldots))$$

soll eine *Reihenentwicklung* des Elementes a aus $\mathfrak{R}$ heißen, wenn für jedes ϱ die Kongruenz

$$a - (\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_\varrho(\alpha)) \leq \mathfrak{m}^{\varrho+1}$$

gilt. Man sieht dann zunächst sofort:

Jedes Element a aus $\mathfrak{R}$ besitzt mindestens eine zugehörige Reihenentwicklung.

Zum Beweis hat man nur zu zeigen: Sind $\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_r(\alpha)$ bereits so gewählt, daß

$$a - (\varphi_0(\alpha) + \cdots + \varphi_r(\alpha)) = b \leq \mathfrak{m}^{r+1}$$

ist, so gibt es stets ein $\varphi_{r+1}(\alpha)$, für das $b - \varphi_{r+1}(\alpha) \leq \mathfrak{m}^{r+2}$ wird. Wegen $b \leq \mathfrak{m}^{r+1}$ besitzt aber b mindestens eine Anfangsform $\overline{\varphi}_{r+1}(x)$ vom Grade $r+1$ [28]); ersetzt man in $\overline{\varphi}_{r+1}(x)$ die Koeffizientenrestklassen durch die repräsentierenden Elemente aus K, die Variabeln x_i durch die Basiselemente α_i von $\mathfrak{m}$, so entsteht eine Form $\varphi_{r+1}(\alpha)$ aus P, für die angesichts der Definition der Anfangsform sicher die Kongruenz $b - \varphi_{r+1}(\alpha) \leq \mathfrak{m}^{r+1}$ gilt. — Damit ist der Existenzbeweis bereits geführt. Gleichzeitig erkennt man:

In $\mathfrak{R}$ gehört dann und nur dann zu jedem Element a genau eine Reihenentwicklung, wenn in $\mathfrak{R}$ jedes Element genau eine Anfangsform besitzt, d. h. wenn $\mathfrak{R}$ ein p-Reihenring ist.

Gehört in $\mathfrak{R}$ zu zwei Elementen a und a' dieselbe Reihenentwicklung

$$\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \cdots,$$

---

[28]) Diese Anfangsform kann hier auch gleich Null sein!

so müssen a und a' modulo jeder Potenz von $\mathfrak{m}$ kongruent sein, und daraus folgt nach Satz 1 sofort $a = a'$. Ein Element a aus $\mathfrak{R}$ ist also durch Angabe irgendeiner zugehörigen Entwicklung $\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \cdots$ eindeutig bestimmt, und *man kann unbedenklich*

$$a = \varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \cdots$$

schreiben.

Was die Addition und Multiplikation unsrer Reihen angeht, so sieht man unmittelbar: Ist

$$a = \varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \cdots, \quad b = \psi_0(\alpha) + \psi_1(\alpha) + \cdots,$$

so ist für jedes ϱ stets

$$(a + b) - ((\varphi_0(\alpha) + \psi_0(\alpha)) + (\varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha)) + \cdots + (\varphi_\varrho(\alpha) + \psi_\varrho(\alpha))) \subset \mathfrak{m}^{\varrho+1};$$

$$a \cdot b - (\varphi_0(\alpha)\psi_0(\alpha) + (\varphi_0(\alpha)\psi_1(\alpha) + \varphi_1(\alpha)\psi_0(\alpha)) + \cdots + (\varphi_0(\alpha)\psi_\varrho(\alpha) + \cdots + \varphi_\varrho(\alpha)\psi_0(\alpha))) \subset \mathfrak{m}^{\varrho+1}.$$

Es sei nun zunächst K ein Unterkörper von $\mathfrak{R}$. Dann gehören, wie bereits bemerkt, die Summen $\varphi_i(\alpha) + \psi_i(\alpha)$ und die Bilinearformen $\varphi_0(\alpha)\psi_i(\alpha) + \cdots + \varphi_i(\alpha)\psi_0(\alpha)$ alle zu dem Formensystem P, und es ist infolgedessen

$$a + b = (\varphi_0(\alpha) + \psi_0(\alpha)) + (\varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha)) + \cdots$$

bzw.

$$a \cdot b = \varphi_0(\alpha)\psi_0(\alpha) + (\varphi_0(\alpha)\psi_1(\alpha) + \varphi_1(\alpha)\psi_0(\alpha)) + \cdots$$

eine Reihenentwicklung von $a + b$ bzw. $a \cdot b$ im oben festgelegten Sinne. Das heißt aber: Ist K ein Körper, so kann man mit den von uns eingeführten Entwicklungen genau so rechnen wie mit gewöhnlichen Potenzreihen, und *es erweist sich der Stellenring* $\mathfrak{R}$ *als homomorph zu einem Unterring* Π *des Ringes* Π^* *aller formalen Potenzreihen in* n *Variabeln* $x_1, \ldots, x_n$ *über* K [29]). Ist insbesondere $\mathfrak{R}$ ein p-Reihenring, so werden $\mathfrak{R}$ und Π sogar isomorph.

Ist es dagegen unmöglich, für K einen Körper zu wählen, so werden die Summen $\varphi_i(\alpha) + \psi_i(\alpha)$ bzw. die Bilinearformen $\varphi_0(\alpha)\psi_i(\alpha) + \cdots + \varphi_i(\alpha)\psi_0(\alpha)$ nicht immer zu P gehören, und es wird daher $(\varphi_0(\alpha) + \psi_0(\alpha)) + (\varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha)) + \cdots$ bzw. $\varphi_0(\alpha)\psi_0(\alpha) + (\varphi_0(\alpha)\psi_1(\alpha) + \varphi_1(\alpha)\psi_0(\alpha)) + \cdots$ i. a. keine Reihenentwicklung von $a + b$ bzw. $a \cdot b$ in unserem Sinne darstellen. Die Dinge liegen dann genau so wie in dem wohlbekannten Spezialfall der Henselschen p-adischen Zahlen [30]).

6. Perfekte Stellenringe [31]).

Rechnerisch kann man bei allgemeinen Stellen- und p-Reihenringen mit Hilfe der in Nr. **5** eingeführten Reihenentwicklungen keine anderen Sätze ableiten als die, die auch allein mit Hilfe des Begriffs der Anfangsform gewonnen werden können. Dabei ist das Arbeiten mit den Anfangsformen wesentlich bequemer als die Benutzung der ins Unend-

[29]) Es ist also $\mathfrak{R}$ isomorph zu einem Restklassenring $\Pi/\mathfrak{o}_\pi$, wobei $\mathfrak{o}_\pi$ ein geeignetes Ideal aus Π bedeutet.

[30]) Vgl. hierzu für den Fall der Bewertungsringe die neueste Lehrbuchdarstellung: B. L. van der Waerden, Moderne Algebra **1**, 2. Aufl. (1937); Abschnitt X, insbesondere S. 252/253.

[31]) Auch zu Nr. **6** vgl. (für die entsprechenden Verhältnisse bei den bewerteten Körpern) Moderne Algebra **1**, 2. Aufl. Abschnitt X.

S. 254, Aufgabe 4 findet sich übrigens eine Unklarheit, auf die hier kurz hingeweisen werden soll, da die Sache an sich von Interesse ist. Es sei $\mathfrak{R}$ ein p-Reihenring, aber kein diskreter Bewertungsring; $\mathfrak{K}$ sei der Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$. Dann erhält man eine diskrete Bewertung B von $\mathfrak{R}$ und damit auch von $\mathfrak{K}$, wenn man jedem $\mathfrak{R}$-Element seinen Anfangsgrad als Wert zuordnet; der Ring $\mathfrak{D}$ aller der $\mathfrak{K}$-Elemente, die in B nichtnegative Werte besitzen, ist ein echter Oberring von $\mathfrak{R}$. Man kann nun einerseits $\mathfrak{K}$ im Sinne der Bewertungstheorie zu einem hinsichtlich der Bewertung B perfekten Körper $\mathfrak{L}^*$ erweitern, und andererseits zu $\mathfrak{R}$ die perfekte Hülle $\mathfrak{R}^*$ im Sinne des Textes bilden. Aus $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{D}$ folgt dann leicht, daß der Quotientenkörper $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ ein *echter* Unterkörper von $\mathfrak{L}^*$ sein muß. In der Aufgabe 4 auf S. 254 des van der Waerdenschen Buches handelt es sich nun offenbar darum, zu einem gewissen speziellen p-Reihenring $\mathfrak{R}$ den Körper $\mathfrak{L}^*$ zu bilden. Als Lösung angegeben wird aber nicht $\mathfrak{L}^*$ sondern $\mathfrak{K}^*$.

liche laufenden Reihen. Gleichwohl haben die Reihenentwicklungen rein heuristisch einen nicht zu unterschätzenden Wert. Sie führen nämlich in zwangloser Weise zur Übertragung des aus der Bewertungstheorie bekannten Perfektheitsbegriffs auf beliebige Stellenringe: Im Stellenringe $\mathfrak{R}$ gehört nach Nr. 5 zu jedem Element a mindestens eine Reihenentwicklung $\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \cdots$. Aber es wird i. a. nicht immer zu jeder willkürlich angeschriebenen Reihe $\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \cdots$ in $\mathfrak{R}$ ein Element a existieren, das gerade diese Entwicklung besitzt. Es liegt dann sehr nahe, den ursprünglichen Ring $\mathfrak{R}$ dadurch zu erweitern, daß man *jeder* formellen Reihe $\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \cdots$ ein Element zuordnet, und man sieht sofort, daß eine derartige Erweiterung genau dem „Perfektmachen" eines beliebig gegebenen diskret bewerteten Körpers entspricht.

Bei der Durchführung dieses Gedankens ist es allerdings wieder zweckmäßig, mit Kongruenzen modulo $\mathfrak{m}^\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \ldots$) statt mit Reihenentwicklungen zu arbeiten, und man wird nicht die Operation des Perfektmachens, sondern den Begriff des perfekten Stellenrings an die Spitze stellen. Man definiert dementsprechend:

Der Stellenring $\mathfrak{R}^*$ soll perfekt heißen, wenn in $\mathfrak{R}^*$ ein unendliches Kongruenzensystem $x \equiv a_\varrho (\mathfrak{m}^{\varrho+1})$ ($\varrho = 0, 1, \ldots$) stets lösbar ist, sofern nur jedes endliche Teilsystem in $\mathfrak{R}^*$ eine Lösung besitzt, d. h. sofern die „Verträglichkeitsbedingung" $a_\varrho \equiv a_{\varrho+1} (\mathfrak{m}^{\varrho+1})$ ($\varrho = 0, 1, \ldots$) erfüllt ist.

Die Einbettung eines beliebig vorgegebenen Stellenringes $\mathfrak{R}$ in eine *perfekte Hülle* $\mathfrak{R}^*$ vollzieht sich nun nach einem wohlbekannten Schema: Man wählt als Elemente von $\mathfrak{R}^*$ alle abgezählt unendlichen Folgen $\{a_0, a_1, \ldots\}$ von Elementen aus $\mathfrak{R}$, die der Verträglichkeitsbedingung

$$a_\varrho \equiv a_{\varrho+1} (\mathfrak{m}^{\varrho+1}) \quad (\varrho = 0, 1, \ldots)$$

genügen. Gleichheit, Addition, Multiplikation erklärt man durch die Festsetzungen:

(1) $\{a_0, a_1, \ldots\} = \{b_0, b_1, \ldots\}$ dann und nur dann, wenn

$$b_\varrho \equiv a_\varrho (\mathfrak{m}^{\varrho+1}) \quad (\varrho = 0, 1, \ldots).$$

(2) $\{a_0, a_1, \ldots\} \dot{+} \{b_0, b_1, \ldots\} = \{a_0 \dot{+} b_0, a_1 \dot{+} b_1, \ldots\}$.

Das Element $\{a, a, \ldots\}$ aus $\mathfrak{R}^*$ wird mit dem Element a aus $\mathfrak{R}$ identifiziert. — Durch diese Festsetzungen wird $\mathfrak{R}^*$ jedenfalls ein Ring, und zwar ein Oberring von $\mathfrak{R}$. (Daß zwei Elemente aus $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ nur dann gleich sein können, wenn sie bereits in $\mathfrak{R}$ gleich sind, folgt aus Satz 1). — Um einzusehen, daß $\mathfrak{R}^*$ einen perfekten Stellenring darstellt, beachte man:

a) Die Menge aller Elemente $\{a_0, a_1, \ldots\}$, bei denen $a_0 < \mathfrak{m}$, und damit auch $a_\varrho < \mathfrak{m}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots$) ist, bildet in $\mathfrak{R}^*$ ein Ideal $\mathfrak{m}^*$; die r-te Potenz von $\mathfrak{m}^*$ besteht aus allen und nur den Elementen $\{a_0, a_1, \ldots\}$, bei denen

$$a_\sigma < \mathfrak{m}^{\sigma+1} \ (\sigma = 0, \ldots, r-1); \ a_\varrho < \mathfrak{m}^r \ (\varrho \geqq r).$$

b) Gehört das Element $\{a_0, a_1, \ldots\}$ nicht zu $\mathfrak{m}^*$, so sind alle a_ϱ in $\mathfrak{R}$ Einheiten. Betrachtet man nun die Folge $\{a_0^{-1}, a_1^{-1}, \ldots\}$, so genügt diese der Verträglichkeitsbedingung, denn aus $a_\varrho - a_{\varrho+1} < \mathfrak{m}^{\varrho+1}$ folgt

$$a_\varrho^{-1} - a_{\varrho+1}^{-1} = (a_\varrho^{-1} \cdot a_{\varrho+1}^{-1}) \cdot (a_{\varrho+1} - a_\varrho) < \mathfrak{m}^{\varrho+1}.$$

In $\mathfrak{R}^*$ besitzt also jedes nicht in $\mathfrak{m}^*$ liegende Element $a^* = \{a_0, a_1, \ldots\}$ ein reziprokes Element $a^{*-1} = \{a_0^{-1}, a_1^{-1}, \ldots\}$, und es muß infolgedessen $\mathfrak{m}^*$ das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}^*$ sein.

c) Es ist für $r = 1, 2, \ldots$ stets $(\mathfrak{m}^*)^r \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{m}^r$, und es können die Restklassenringe $\mathfrak{R}^*/(\mathfrak{m}^*)^r$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}^r$ (also insbesondere die Restklassenkörper $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$) identifiziert werden. — Der Durchschnitt aller Potenzen von $\mathfrak{m}^*$ ist gleich dem Nullideal, und man kann infolgedessen in $\mathfrak{R}^*$ den Begriff der Anfangsform und des Leitideals genau so einführen wie in $\mathfrak{R}$.

d) Es sei $\mathfrak{a}^*$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}^*$, und es seien in $\mathfrak{a}^*$ die Elemente $a_1^*, \ldots, a_\omega^*$ so bestimmt, daß die Leitideale von $\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{b}^* = (a_1^*, \ldots, a_\omega^*)$ gleich sind [32]). Dann zeigt eine leichte Rechnung, daß zu jedem $a^* < \mathfrak{a}^*$ die Elemente $b_1^*, \ldots, b_\omega^*$ aus $\mathfrak{R}^*$ so bestimmt werden können, daß die Gleichung

$$a^* = \sum_1^\omega a_i^* b_i^*$$

gilt. Es ist also

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^* = (a_1^*, \ldots, a_\omega^*),$$

d. h. es besitzt in $\mathfrak{R}^*$ jedes Ideal eine endliche Basis. (Man hat angesichts der Definition von $\mathfrak{R}^*$ nur zu beweisen: Wird $a^* - \sum_1^\omega a_i^* b_i < (\mathfrak{m}^*)^\varrho$ für geeignete b_i aus $\mathfrak{R}$, so lassen sich stets in $\mathfrak{R}$ die Elemente $b_1', \ldots, b_\omega'$ so wählen, daß

$$b_i - b_i' < \mathfrak{m}^\varrho, \quad a^* - \sum_1^\omega a_i^* b_i' < (\mathfrak{m}^*)^{\varrho+1}$$

wird. Die Existenz der b_i' ergibt sich aber mühelos aus Überlegungen von der beim Beweise von Satz 3 benutzten Art.)

e) Es sei in $\mathfrak{R}^*$ ein unendliches Kongruenzensystem

$$x \equiv a_\varrho^* (\mathfrak{m}^*)^{\varrho+1} \text{ mit } a_\varrho^* \equiv a_{\varrho+1}^* (\mathfrak{m}^*)^{\varrho+1} \quad (\varrho = 0, 1, \ldots)$$

vorgelegt. Bestimmt man dann, was nach c) sicher möglich ist, die Elemente a_ϱ aus $\mathfrak{R}$ so, daß durchweg $a_\varrho^* - a_\varrho < (\mathfrak{m}^*)^{\varrho+1}$ wird, so erhält man in Gestalt des Elementes $a^* = \{a_0, a_1, \ldots\}$ eine zu $\mathfrak{R}^*$ gehörige Lösung des gegebenen Kongruenzensystems.

Durch a) — e) ist gezeigt:

Satz 14. *Ein beliebiger Stellenring $\mathfrak{R}$ kann stets in einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten kleinsten umfassenden perfekten Stellenring $\mathfrak{R}^*$ eingebaut werden. — Bedeutet $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{m}^*$ das maximale Primideal von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}^*$, so lassen sich für jedes r die Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}^r$ und $\mathfrak{R}^*/(\mathfrak{m}^*)^r$ identifizieren.*

Die Brauchbarkeit von Satz 14 beruht vor allem auf

Satz 15. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ gilt die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$. Das heißt: Sind $a_1, \ldots, a_\omega$ irgendwelche Elemente aus $\mathfrak{a}$, die in $\mathfrak{R}^*$ eine Basis von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{R}^*$ bilden, so ist auch $(a_1, \ldots, a_\omega)$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$.*

In der Tat, ist $a^* = \sum_1^\omega a_i b_i^*$ ein Element aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{R}^*$, so kann man die Elemente b_i in $\mathfrak{R}$ stets so bestimmen, daß a^* und $a = \sum_1^\omega a_i b_i$ dieselbe Anfangsform haben. Wegen $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{R}^* = (a_1, \ldots, a_\omega) \cdot \mathfrak{R}^*$ müssen daher $\mathfrak{a}$ und $(a_1, \ldots, a_\omega)$ dasselbe Leitideal besitzen und somit nach Satz 3 identisch sein.

Satz 15 gestattet eine bemerkenswerte Anwendung auf die Theorie der konvergenten Potenzreihen [33]):

Satz 16. *Es seien $A, A_1, \ldots, A_\omega$ konvergente Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten, und es gelte eine Gleichung $A = \sum_1^\omega A_i B_i^*$, bei der die B_i^**

---

[32]) Man beachte, daß jedes Formenideal eine endliche Basis besitzt! Die folgenden Überlegungen habe ich (für den Fall eines nullteilerfreien Stellenrings mit nur einem einzigen von (0) verschiedenen Primideal) bereits in einer früheren Arbeit ausführlich dargestellt: Ein Satz über primäre Integritätsbreiche, Math. Annalen **103** (1930), S. 450 bis 465.

[33]) Vgl. die in Anm. [2]) zitierte Laskersche Arbeit (S. 95), sowie: B. L. van der Waerden, Nullstellentheorie der Polynomideale, Math. Annalen **96** (1926), S. 183—208; Anm. 29 a) S. 205. An den genannten Stellen handelt es sich um den Schluß vom Ringe aller formalen oder konvergenten Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ auf den entsprechenden Polynomring. Die Fragestellung ist also eine ähnliche wie im Text, aber durchaus nicht die gleiche.

formale Potenzreihen in den x_i mit komplexen Koeffizienten sind. Dann gilt stets auch eine Gleichung $A = \sum_1^\omega A_i B_i$ mit konvergenten Potenzreihenfaktoren B_i.

In der Tat, es sei $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}^*$ der Ring aller konvergenten bzw. formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Dann sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^*$ Stellenringe [34]), und es stellt dabei offenbar $\mathfrak{R}^*$ die perfekte Hülle von $\mathfrak{R}$ dar. $A = \sum_1^\omega A_i B_i^*$ bedeutet nun soviel wie $A < (A_1, \ldots, A_\omega) \cdot \mathfrak{R}^*$, und daraus folgt nach Satz 15 sofort $A < (A_1, \ldots, A_\omega) \cdot \mathfrak{R}$, d. h. die Gültigkeit einer Gleichung $A = \sum_1^\omega A_i B_i$. — Wie man aus der Art des Beweises sieht, gilt Satz 16 auch dann noch, wenn man den Koeffizientenkörper aller komplexen Zahlen durch einen beliebigen Unterkörper (z. B. durch den Körper aller reellen Zahlen) ersetzt.

Satz 16 ist ein reines Existenztheorem, er liefert keinen Algorithmus, der es gestattete, aus der gegebenen Gleichung $A = \sum_1^\omega A_i B_i^*$ die konvergenten Reihen B_i irgendwie systematisch zu berechnen. Aber die Entwicklung eines derartigen Rechenverfahrens scheint mir überhaupt eine sehr schwierige, bisher noch nicht allgemein gelöste Aufgabe zu sein, und auch der bloße Existenzsatz gestattet mannigfache praktische Anwendungen. Die Bedeutung von Satz 16 darf daher nicht unterschätzt werden.

7. Konstruktive Probleme.

Die Möglichkeit des Einbaues eines beliebigen Stellenrings in einen perfekten ist auch deshalb sehr wichtig, weil der Versuch eines konstruktiven Aufbaus der perfekten Stellenringe recht aussichtsreich scheint. Im folgenden skizziere ich nach dem Vorbild der diskret bewerteten Körper kurz die Richtlinien, denen man bei einem derartigen Aufbau zu folgen hätte [35]).

Zunächst wird man zeigen, daß man sich auf die Betrachtung von perfekten p-Reihenringen beschränken darf, indem man den sehr plausibeln Satz beweist, daß jeder beliebige perfekte Stellenring als Restklassenring eines perfekten p-Reihenringes dargestellt werden kann [36]). Was die perfekten p-Reihenringe angeht, so folgt aus den Betrachtungen von Nr. **5**:

Enthält der perfekte p-Reihenring $\mathfrak{R}^*$ einen Unterkörper K, der gleichzeitig ein volles Restsystem von $\mathfrak{R}^*$ modulo $\mathfrak{m}^*$ darstellt, so ist $\mathfrak{R}^*$ isomorph zum Ring aller formalen Potenzreihen in n Variabeln mit Koeffizienten aus K, wobei die Variabelnzahl n der Gliederzahl einer Minimalbasis von $\mathfrak{m}^*$ gleich ist. *In diesem Falle ist also $\mathfrak{R}^*$ durch Angabe des Restklassenkörpers $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ und der Zahl n bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Andererseits zeigt man leicht mit klassischen Henselschen Schlüssen, *daß ein Unterkörper K der gewünschten Art sicher existiert, wenn der Restklassenkörper $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ die Charakteristik 0 besitzt* [9]). Es bleibt also nur noch der Fall zu untersuchen, daß $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ von Primzahlcharakteristik π ist; hier wird man zwei Möglichkeiten unterscheiden: Entweder, es hat nicht nur $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$, sondern auch $\mathfrak{R}^*$ selbst die Charakteristik π; dann kann

---

[34]) Zur Tatsache, daß nicht nur $\mathfrak{R}$, sondern auch $\mathfrak{R}^*$ der Maximalbedingung genügt, vgl. z. B.: W. Rückert, Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale, Math. Annalen **107** (1932), S. 259—281.

[35]) Vorbildlich für die Aufstellung unserer Richtlinien ist im wesentlichen die in Anm. [10]) genannte Hasse-Schmidtsche Arbeit. Bei der Durchführung unsres Programms im Einzelnen dürfte es zweckmäßig sein, sich soweit wie möglich an die folgenden beiden Arbeiten anzuschließen: E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n; O. Teichmüller, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper, dieses Journal **176** (1936), S. 126—140 bzw. S. 141—152.

[36]) Dieser Satz hat in den in den Anm. [10]) und [35]) genannten Arbeiten kein Vorbild. Sein Beweis dürfte aber verhältnismäßig einfach sein.

man wieder mit der Gültigkeit des für den Fall eines Restklassenkörpers $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ von Charakteristik 0 bereits gesicherten Isomorphiesatzes rechnen. Oder aber, es hat $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{m}^*$ die Charakteristik π, $\mathfrak{R}^*$ selbst dagegen die Charakteristik 0. Dann gibt es in $\mathfrak{R}^*$ sicher keinen Unterkörper K, der ein volles Restsystem modulo $\mathfrak{m}^*$ darstellte, und man kann nur in einem geeigneten Spezialfall auf einen einfachen Isomorphiesatz hoffen. Ein solcher Spezialfall dürfte dann vorliegen, wenn $\mathfrak{R}^*$ „unverzweigt" ist, d. h. wenn die Primzahl π nur in der ersten, nicht aber in der zweiten Potenz von $\mathfrak{m}^*$ vorkommt, und infolgedessen in eine Minimalbasis von $\mathfrak{m}^*$ aufgenommen werden kann. Für einen unverzweigten Ring $\mathfrak{R}^*$ gilt, soweit ich vermuten möchte, wohl wieder der Satz, daß die Angabe des Restklassenkörpers und der Gliederzahl einer Minimalbasis von $\mathfrak{m}^*$ den Ring bis auf Isomorphie eindeutig festlegen. Zum Beweis müßte man voraussichtlich nach einer passenden Verallgemeinerung derjenigen Methoden suchen, die in letzter Zeit von den Herren Hasse, Witt und Teichmüller für diskret bewertete Körper entwickelt wurden [35]).

8. Beliebige Ringe mit Maximalbedingung.

Bei der Entwicklung der Dimensionstheorie der Stellenringe in Nr. 3 habe ich den Satz 7 nicht bewiesen, sondern mich auf eine früher an verhältnismäßig versteckter Stelle erschienene Arbeit [2]) berufen. Um in der Darstellung keine Lücke zu lassen, möchte ich meinen alten Beweis in etwas vereinfachter Form hier nochmals kurz wiedergeben, und zwar gleich für den allgemeinsten Fall. Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz beliebiger Ring, der der Maximalbedingung genügt. Dann lautet der in Frage stehende Satz:

Satz 7*. *Ist in $\mathfrak{R}$ das Primideal $\mathfrak{p}$ minimales Primoberideal eines Ideals $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ mit r-gliedriger Basis, so hat $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ höchstens den Dimensionsdefekt r.*

Den Beweis gliedern wir in vier Schritte. a) Es sei $\mathfrak{R}$ ein nullteilerfreier Stellenring mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ sei das maximale Primideal von $\mathfrak{R}$, und es sei $\mathfrak{a} = (a)$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal. Dann ist zu zeigen, daß in $\mathfrak{R}$ jedes Primunterideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ gleich dem Nullideal sein muß.

Bilden wir zu $\mathfrak{q}$ den Primidealquotientenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ [37]), und setzen wir $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{R}'$, so ist $\mathfrak{R}'$ ein Stellenring mit dem maximalen Primideal $\mathfrak{q}'$, und es wird

$$\mathfrak{q}'^i = \mathfrak{q}^i \cdot \mathfrak{R}' \,(i = 1, 2, \ldots),$$

während $\mathfrak{q}'^i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{q}^{(i)}$ in $\mathfrak{R}$ jeweils ein zu $\mathfrak{q}$ gehöriges Primärideal darstellt. Können wir zeigen, daß einmal $\mathfrak{q}^{(r)} = \mathfrak{q}^{(r+1)}$ wird, so erhalten wir

$$\mathfrak{q}'^r = \mathfrak{q}'^{r+1} = \cdots,$$

und daraus folgt angesichts von Satz 1 sofort

$$\mathfrak{q}'^r = (0),\ \mathfrak{q}' = \mathfrak{q} = (0).$$

Es bedeute nun $\mathfrak{b}_i$ das Ideal $(a) + \mathfrak{q}^{(i)}$ aus $\mathfrak{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dann sind alle $\mathfrak{b}_i$ gleichzeitig mit (a) zu $\mathfrak{m}$ gehörige Primärideale, und man hat

$$\mathfrak{b}_1 \geqq \mathfrak{b}_2 \geqq \mathfrak{b}_3 \geqq \cdots \geqq (a).$$

Daraus ergibt sich aber auf Grund der für $\mathfrak{R}$ geltenden Maximalbedingung nach einem bekannten Satz [38]), daß für hinreichend großes r sicher $\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_{r+1}$ sein muß. Es wird dann wegen $\mathfrak{q}^{(r+1)} \leqq \mathfrak{q}^{(r)}$ offenbar

$$\mathfrak{q}^{(r)} = \mathfrak{q}^{(r+1)} + ((a) \cap \mathfrak{q}^{(r)}),$$

und wegen der Hauptidealeigenschaft von (a) gilt eine Gleichung $(a) \cap \mathfrak{q}^{(r)} = (a) \cdot \mathfrak{r}$,

---

[37]) $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ besteht aus allen Quotienten $\frac{a}{b}$ (a und b in $\mathfrak{R}$, b nicht in $\mathfrak{q}$). Zu den einfachen Eigenschaften der Primidealquotientenringe vgl. z. B. Idealbericht, Nr. 7.

[38]) Vgl. hierzu z. B. Idealbericht, Nr. 13. (Es handelt sich um die Tatsache, daß bei einem „primären Nullteilerring", der nur ein einziges Primideal enthält, — in unserm Falle beim Restklassenring $\mathfrak{R}/(a)$ —, aus der Gültigkeit der Maximalbedingung stets die Gültigkeit der Minimalbedingung folgt.)

wobei $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^{(r)}$ sein muß, weil (a) als zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal zu dem zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Primärideal $\mathfrak{q}^{(r)}$ prim ist. Ist nun etwa $\mathfrak{q}^{(r)} = (q_1, \ldots, q_s)$, so folgt aus $\mathfrak{q}^{(r)} = \mathfrak{q}^{(r+1)} + (a) \cdot \mathfrak{q}^{(r)}$ ein Kongruenzensystem

$$q_i \equiv \sum_{k=1}^{s} a \cdot b_{ik} \cdot q_k \,(\mathfrak{q}^{(r+1)}) \text{ für } i = 1, \ldots, s,$$

und weil die Determinante $|a \cdot b_{ik} - \delta_{ik}|$ $(i, k = 1, \ldots, s)$ modulo (a) und damit erst recht modulo $\mathfrak{m}$ dem Einheitselement kongruent ist und infolgedessen in $\mathfrak{R}$ eine Einheit darstellt, ergibt sich (in ähnlicher Weise wie beim Beweise von Satz 1)

$$\mathfrak{q}^{(r)} = (q_1, \ldots, q_s) \leqq \mathfrak{q}^{(r+1)};$$

man hat also $\mathfrak{q}^{(r)} = \mathfrak{q}^{(r+1)}$, $\mathfrak{q} = (0)$, wie gezeigt werden sollte.

b) Aus dem Ergebnis von a) gewinnt man mühelos Satz 7* für $r = 1$, d. h. den folgenden „*Hauptidealsatz*“:

Ist $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ minimales Primoberideal eines Hauptideals (a), so hat $\mathfrak{p}$ höchstens den Dimensionsdefekt 1.

In der Tat, nehmen wir an, es gebe eine Primunteridealkette $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2$! Dann ist im Restklassenintegritätsbereich $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}_2$ das Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_1 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_2$ ein echtes vom Nullideal verschiedenes Unterideal des Primideals $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_2$, und es ist $\bar{\mathfrak{p}}$ minimales Primoberideal von $(\bar{a})$, falls $\bar{a}$ die durch a repräsentierte Restklasse aus $\overline{\mathfrak{R}}$ bedeutet. Bilden wir weiter den Primidealquotientenring $\overline{\mathfrak{R}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$, so wird $\bar{\mathfrak{p}} \cdot \overline{\mathfrak{R}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ das maximale Primideal von $\overline{\mathfrak{R}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$, und es stellt $(\bar{a}) \cdot \overline{\mathfrak{R}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{p}}_1 \cdot \overline{\mathfrak{R}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ ein zu $\bar{\mathfrak{p}} \cdot \overline{\mathfrak{R}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ gehöriges Primärideal bzw. ein vom Nullideal verschiedenes echtes Primunterideal von $\bar{\mathfrak{p}} \cdot \overline{\mathfrak{R}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ dar. Diese Feststellungen stehen aber im Widerspruch zu dem Ergebnis von a), die Existenz einer Kette $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2$ ist also ausgeschlossen.

c) Um beim Beweis von Satz 7* vom bereits erledigten Falle $r = 1$ auf beliebiges r schließen zu können, brauchen wir den folgenden Hilfssatz: Gibt es im Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ eine Primunteridealkette $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_1 > \cdots > \mathfrak{p}_{l-1} > \mathfrak{p}_l = (0)$ mit $l \geqq 2$, und ist dabei $\mathfrak{p}$ in keinem der endlich vielen Primideale $\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\omega)}$ enthalten, so existiert in $\mathfrak{R}$ stets auch eine Primunteridealkette $\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_1^* > \cdots > \mathfrak{p}_{l-1}^*$, bei der keines der Primideale $\mathfrak{p}_i^*$ $(i = 1, \ldots, l-1)$ in einem der Primideale $\mathfrak{p}^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, \omega)$ enthalten ist.

Zum Beweis genügt es offenbar zu zeigen, daß es immer ein zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_2$ liegendes, in keinem $\mathfrak{p}^{(k)}$ enthaltenes Primideal $\mathfrak{p}_1^*$ gibt. — Es sei c ein (immer vorhandenes) [39]) weder zu $\mathfrak{p}_2$ noch zu einem der Primideale $\mathfrak{p}^{(k)}$ gehöriges Element aus $\mathfrak{p}$. Dann existiert wegen $\mathfrak{p}_2 + (c) \leqq \mathfrak{p}$ sicher ein in $\mathfrak{p}$ liegendes minimales Primoberideal $\mathfrak{p}_1^*$ von $\mathfrak{p}_2 + (c)$, und es muß nach b) notwendig $\mathfrak{p}_1^* \neq \mathfrak{p}$ sein, weil $\mathfrak{p}_1^*/\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_2$ minimales Primoberideal des Hauptideals $(\mathfrak{p}_2 + (c))/\mathfrak{p}_2$ ist, während $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_2$ mindestens den Dimensionsdefekt 2 besitzt.

d) Wir setzen jetzt die Richtigkeit von Satz 7* für $0 < r \leqq R - 1$ voraus und beweisen seine Gültigkeit für $r = R$. Dabei dürfen wir uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, daß das betrachtete Primideal $\mathfrak{p}$ maximales Primideal eines nullteilerfreien Stellenringes $\mathfrak{R}$ ist und ein zugehöriges Primärideal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots .. a_R)$ besitzt. Denn der allgemeinste Fall kann durch Überlegungen von der in b) benutzten Art mühelos auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden. — Ist nicht nur $(a_1, \ldots, a_R)$, sondern auch $\mathfrak{b} = (a_1, \ldots, a_{R-1})$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so haben wir angesichts unserer Induktionsvoraussetzung nichts zu beweisen. Wir wollen also annehmen, daß die endlich

---

[39]) Die Existenz von c ergibt sich aus ganz elementaren Überlegungen. Vgl. die in Anm. [2]) zitierte Arbeit, S. 10, Anm. [2]).

vielen minimalen Primoberideale $\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\omega)}$ von $\mathfrak{b}$ *echte* Unterideale von $\mathfrak{p}$ sind. Außer $\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\omega)}$, $\mathfrak{p}$ gibt es in $\mathfrak{R}$ keine weiteren Primoberideale von $\mathfrak{b}$, weil $\mathfrak{p}/\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ als minimales Primoberideal des Hauptideals $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = (\mathfrak{b} + (a_R))/\mathfrak{b}$ den Dimensionsdefekt 1 besitzt.

Es sei jetzt irgendeine Primunteridealkette

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_1 < \cdots < \mathfrak{p}_{l-1} < \mathfrak{p}_l = (0)$$

vorgelegt. Dann gibt es nach c) eine zweite Primunteridealkette

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_1^* < \cdots < \mathfrak{p}_{l-1}^*,$$

bei der $\mathfrak{p}_{l-1}^*$ in keinem der Primideale $\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\omega)}$ enthalten ist, sodaß $\mathfrak{b} + \mathfrak{p}_{l-1}^*$ in $\mathfrak{R}$ kein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primoberideal besitzt. In $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}_{l-1}^*$ wird $\overline{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b} + \mathfrak{p}_{l-1}^*)/\mathfrak{p}_{l-1}^*$ ein zu $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}^*$ gehöriges Primärideal mit $(R-1)$-gliedriger Basis, und es stellt daselbst

$$\bar{\mathfrak{p}} > \bar{\mathfrak{p}}_1^* > \cdots > \bar{\mathfrak{p}}_{l-1}^* \; (\bar{\mathfrak{p}}_i^* = \mathfrak{p}_i^*/\mathfrak{p}_{l-1}^* \; (i = 1, \ldots, l-1))$$

eine l-gliedrige, mit $\bar{\mathfrak{p}}$ beginnende Primunteridealkette dar. Die Anwendung unserer Induktionsvoraussetzung auf $\bar{\mathfrak{p}}$ liefert nun sofort die Ungleichung $l-1 \leqq R-1$, $l \leqq R$. Eine mit $\mathfrak{p}$ beginnende Primunteridealkette besitzt also nie mehr als $R+1$ verschiedene Glieder, d. h. es ist der Dimensionsdefekt von $\mathfrak{p}$ höchstens gleich R.

Angesichts von Satz 7* liegt es nahe zu vermuten, daß in einem beliebigen Ring mit Maximalbedingung jedes Primideal eine endliche Dimension besitzt. Indessen wird diese Vermutung durch das folgende Beispiel widerlegt: Es sei

$$\mathfrak{S} = \mathsf{K}[x_1^{(1)}, \ldots, x_{i_k}^{(k)}, \ldots] \; (k = 1, 2, \ldots; i_k = 1, \ldots, k)$$

der Polynomring in abzählbar unendlich vielen Variabeln $x_{i_k}^{(k)}$ über einem Körper K, es bedeute $\mathfrak{m}_k$ das $\mathfrak{S}$-Primideal $(x_1^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)})$, und es möge unter S das System aller der Polynome verstanden werden, die in keinem einzigen $\mathfrak{m}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ enthalten sind. Dann gilt

Satz 19. *Der Ring $\mathfrak{R}$ aller Quotienten $\frac{a}{b}$ (a in $\mathfrak{S}$, b in S) ist ein Ring mit Maximalbedingung, in dem das Nullideal keine endliche Dimension besitzt.*

In der Tat, zunächst ist

$$(0) < (x_1^{(k)}) < (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) < \cdots < (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)})$$

in $\mathfrak{R}$ eine $(k+1)$-gliedrige Primoberidealkette $(k = 1, 2, \ldots)$; die Dimensionsbehauptung ist also sicher richtig. — Es sei ferner $a \neq 0$ ein beliebiges Polynom aus $\mathfrak{S}$, und es sei n so groß gewählt, daß a in keinem der Primideale $\mathfrak{m}_{n+1}, \mathfrak{m}_{n+2}, \ldots$ enthalten ist. Dann sind in $\mathfrak{R}/(a)$ alle die Restklassen, die durch von $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(n)}$ unabhängige Polynome erzeugt werden, Einheiten, und daraus schließt man mühelos: Es sei Λ der Körper

$$\mathsf{K}(x_1^{(n+1)}, \ldots, x_{i_k}^{(k)}, \ldots) \; (k = n+1, n+2, \ldots; i_k = 1, \ldots, k),$$

und es sei φ' das System aller der Polynome aus dem Polynomring $\mathfrak{S}' = \Lambda[x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(n)}]$, die in keinem der $\mathfrak{S}$-Primideale $\mathfrak{m}_k' = (x_1^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}) \cdot \mathfrak{S}'$ $(k = 1, \ldots, n)$ enthalten sind; schließlich möge unter $\mathfrak{R}'$ der Ring aller Quotienten $\frac{a}{b}$ (a in $\mathfrak{S}'$, b in S') verstanden werden. Dann ist $\mathfrak{R}/(a)$ zu einem Restklassenring $\mathfrak{R}'/\mathfrak{a}'$ isomorph. Da nun $\mathfrak{R}'$ ein Ring mit Maximalbedingung ist, und da jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Polynom $a \neq 0$ aus $\mathfrak{S}$ enthält, ist gezeigt: Für jeden echten Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ gilt die Maximalbedingung. — Daraus folgt aber sofort die Maximalbedingung für $\mathfrak{R}$ selbst.

Wir bringen jetzt noch zwei einfache Anwendungen der Stellenringtheorie auf einen beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ mit Maximalbedingung. Unter der i-ten „symbolischen

Potenz" $\mathfrak{p}^{(i)}$ des $\mathfrak{J}$-Primideals $\mathfrak{p}$ verstehen wir die zu $\mathfrak{p}$ gehörige (einzige) isolierte Primärkomponente der gewöhnlichen Potenz $\mathfrak{p}^i$. Bedeutet $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ den durch $\mathfrak{p}$ bestimmten Primidealquotientenring, so hat man

$$\mathfrak{p}^{(i)} = (\mathfrak{p}^i \cdot \mathfrak{J}_\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{J} = (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}_\mathfrak{p})^i \cap \mathfrak{J},$$

und durch Anwendung von Satz 1 auf $\mathfrak{R} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ ergibt sich sofort

Satz 20. *In $\mathfrak{J}$ ist der Durchschnitt aller symbolischen (und damit erst recht aller gewöhnlichen) Potenzen eines beliebigen Primideals $\mathfrak{p}$ stets gleich dem Nullideal.*

In ähnlich einfacher Weise beweist man

Satz 21. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{J}$ mit der Primärkomponentenzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$, und es seien die Primideale $\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\omega)}$ in $\mathfrak{J}$ so gewählt, daß jedes $\mathfrak{q}_i$ in mindestens einem $\mathfrak{p}^{(k)}$ enthalten ist; $\mathfrak{J}_k^*$ $(k = 1, \ldots, \omega)$ bedeute die zum Primidealquotientenring $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}^{(k)}}$ gehörige perfekte Hülle. Dann folgt für ein $\mathfrak{J}$-Element a aus $a < \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_k^*$ $(k = 1, \ldots, \omega)$ stets $a < \mathfrak{a}$.*

In der Tat, einerseits hat man $\mathfrak{a} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}^{(1)}} \cap \cdots \cap \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}^{(\omega)}}$, und andererseits ergibt sich nach Satz 16 aus $a < \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_k^*$ stets $a < \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}^{(k)}}$.

Satz 20 ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil er die abstrakte Fassung eines in der Theorie der Polynom- und Potenzreihenringe wohlbekannten Laskerschen Satzes [40]) darstellt.

9. Leitideale in Potenzreihenringen.

Im folgenden wird eine naheliegende, praktisch wichtige Verallgemeinerung des bisherigen Leitidealbegriffs besprochen. Es sei P irgendein Ring mit Maximalbedingung, unter $\mathfrak{P}$ möge der Polynomring in $x_1, \ldots, x_n$ über P verstanden werden. $\mathfrak{R}$ sei ein Ring aus formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus P, der den folgenden drei Bedingungen genügt: a) Das Ideal aller der Reihen aus $\mathfrak{R}$, die kein von 0 verschiedenes, von den Variabeln freies Anfangsglied besitzen, hat die Basis $(x_1, \ldots, x_n)$. b) Eine Reihe aus $\mathfrak{R}$, die mit einer Einheit aus P beginnt, ist stets in $\mathfrak{R}$ Einheit. c) Für $\mathfrak{R}$ gilt die Maximalbedingung [41]).

Jede Reihe p aus $\mathfrak{R}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Entwicklung

$$p = \sum_0^\infty \varphi_i(x)$$

nach homogenen Formen steigenden Grades aus $\mathfrak{P}$; ist

$$\varphi_0(x) = \cdots = \varphi_{m-1}(x) = 0, \quad \varphi_m(x) \neq 0,$$

so bezeichnen wir $\varphi_m(x)$ als die *A-Form*, m als den *A-Grad* von p. Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{R}$-Ideal, so bildet die Menge der A-Formen aller Elemente von $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{P}$-Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$, das *L-Ideal* von $\mathfrak{a}$ [42]). Die Bildung der A-Form der Summe und des Produkts erfolgt genau nach den in Nr. 2 für Anfangsformen angegebenen Regeln. Für die L-Ideale gelten die in Nr. 2 für Leitideale aufgestellten Formeln (1), (2), (3). — Allein aus diesen Bemerkungen ergibt sich sofort:

---

[40]) Es handelt sich um denjenigen Satz, auf den bereits in Anm. [33]) hingewiesen wurde. Zum Beweise des Laskerschen Satzes vgl. meine in Anm. [2]) genannte Arbeit, sowie: F. S. Macaulay, Modern algebra and polynomial ideals, Proc. Cambridge Philos. Soc. (1) **30** (1934), S. 27—64.

[41]) Den Bedingungen a), b), c) genügt jedenfalls der Ring $\mathfrak{R}^*$ *aller* formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über P. Der Beweis der Maximalbedingung für $\mathfrak{R}^*$ kann mit Hilfe des weiter unten einzuführenden L-Idealbegriffes genau so erbracht werden wie der Beweis der Maximalbedingung für die perfekte Hülle $\mathfrak{R}^*$ bei Satz 16.

[42]) „A-Form" bzw. „L-Ideal" ist natürlich nur eine Abkürzung für „Anfangsform" bzw. „Leitideal". Es schien mir aber nötig, eine Bezeichnung zu wählen, die eine Verwechslung der neuen Definitionen mit den in Nr. 1—Nr. 8 benutzten Definitionen vermeidet.

Satz 22. *Satz* 12 *und Satz* 13 *gelten ohne Änderung des Wortlautes auch für die L-Ideale des Potenzreihenrings* $\mathfrak{R}$.

Die zum Beweis von Satz 12 und 13 dienenden rein formalen Rechnungen lassen sich nämlich unmittelbar auf den neuen Fall übertragen, wobei noch eine gewisse Vereinfachung dadurch bedingt wird, das diesmal jede Reihe nur eine einzige A-Form besitzt. An die Stelle des „einzigen maximalen Primideals $\mathfrak{m}$" tritt diesmal das in $\mathfrak{R}$ nicht maximale [43]) Primideal $\mathfrak{n} = (x_1, \ldots, x_n)$. — Etwas umständlicher als in Nr. 4 müssen wir vorgehen, wenn es sich darum handelt, aus Satz 13 den Hilfssatz abzuleiten:

Hat das L-Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ *von* $\mathfrak{a}$ *eine (endliche) Dimension* $\mu > 1$, *so gibt es stets ein* $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$, *dessen L-Ideal* $\bar{\mathfrak{c}}$ *genau die Dimension* $\mu - 1$ *besitzt.*

Wir schließen diesmal so: Es sei $\bar{\mathfrak{p}}$ ein μ-dimensionales Primoberideal von $\bar{\mathfrak{a}}$; dann gibt es stets ein nicht zu $\mathfrak{a}$ gehöriges $(\mu - 1)$-dimensionales Primoberideal $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{\mathfrak{p}}$ [44]). Ist nun a eine Reihe, deren A-Form $\overline{\varphi}$ zwar in $\bar{\mathfrak{q}}$, aber in keinem der endlich vielen μ-dimensionalen Primoberideale von $\bar{\mathfrak{a}}$ liegt, und bedeutet $\bar{\tau}$ eine nicht in $\bar{\mathfrak{q}}$, aber in allen höchstens $(\mu - 1)$-dimensionalen, zu $\bar{\mathfrak{a}}$ gehörigen Primidealen enthaltene Form, so hat das L-Ideal $\bar{\mathfrak{c}}$ von $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (a)$ genau die Dimension $\nu = \mu - 1$, weil einerseits sicher $\nu < \mu$ ist, und andererseits aus Satz 13 sofort $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{\tau}} = (\bar{\mathfrak{a}} + (\overline{\varphi}))_{\bar{\tau}} \leqq \bar{\mathfrak{q}}$ folgt. — Für die weiteren Sätze, bei denen wir auf die Theorie der Stellenringe zurückgreifen müssen, brauchen wir einige Vorbemerkungen: Es seien $\mathfrak{m}_1^0, \mathfrak{m}_2^0, \ldots, \mathfrak{m}_\tau^0, \ldots$ die maximalen Primideale von P. Dann sind $\overline{\mathfrak{m}}_\tau = \mathfrak{m}_\tau^0 \cdot \mathfrak{P} + \bar{\mathfrak{n}}$ bzw. $\mathfrak{m}_\tau = \mathfrak{m}_\tau^0 \cdot \mathfrak{R} + \mathfrak{n}$ $(\tau = 1, 2, \ldots)$ die sämtlichen maximalen Primideale von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{R}$. (Beweis trivial; bei $\mathfrak{R}$ sind die Grundeigenschaften a) und b) zu berücksichtigen; bei $\mathfrak{P}$ hat man zu beachten, daß nur Ideale aus homogenen Formen zugelassen sind.) Der Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_\tau = \mathfrak{R}_{\mathfrak{m}_\tau}$ ist, wie mühelos zu sehen, ein den Bedingungen a), b), c) genügender Potenzreihenring über dem Stellenring $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}_{\mathfrak{m}_\tau^0}$ [45]); der zugehörige Polynomring ist $\mathfrak{P}_\tau = \mathfrak{P} \cdot \mathsf{P}_\tau$. — Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit dem L-Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$, so ist $\bar{\mathfrak{a}}'_\tau = \bar{\mathfrak{a}} \cdot \mathsf{P}_\tau$ das L-Ideal von $\mathfrak{a}'_\tau = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{R}_\tau$, und es gelten die Gleichungen $\mathfrak{a} = \bigcap_\tau \mathfrak{a}'_\tau$, $\bar{\mathfrak{a}} = \bigcap_\tau \bar{\mathfrak{a}}'_\tau$. Mit Hilfe dieser Bemerkungen zeigt man leicht

Satz 23. *Satz* 3 *und die aus ihm folgenden Sätze* 4 *und* 5 *gelten auch für die L-Ideale des Potenzreihenrings* $\mathfrak{R}$. — *Dabei ist Satz* 5 *so zu formulieren: Ist* $\bar{\mathfrak{a}}_\tau$ *ein zu* $\overline{\mathfrak{m}}_\tau$ *gehöriges Primärideal, so ist* $\mathfrak{a}_\tau$ *ein zu* $\mathfrak{m}_\tau$ *gehöriges Primärideal.*

In der Tat, aus $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}}$ folgt $\mathfrak{a}'_\tau \leqq \mathfrak{b}'_\tau$, $\bar{\mathfrak{a}}'_\tau = \bar{\mathfrak{b}}'_\tau$ für jedes τ. Es ist daher $\mathfrak{b}'_\tau \leqq \mathfrak{a}'_\tau + \mathfrak{n}^\varrho \cdot \mathfrak{R}_\tau$ und damit wegen $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}_\tau$ erst recht $\mathfrak{b}'_\tau \leqq \mathfrak{a}'_\tau + \mathfrak{m}'^\varrho_\tau$ für jedes τ und $\varrho = 1, 2, \ldots$. Da nun $\mathfrak{R}_\tau$ ein Stellenring mit dem maximalen Primideal $\mathfrak{m}'_\tau$ ist, ergibt sich nach Nr. 2 sofort

$$\mathfrak{a}'_\tau = \mathfrak{b}'_\tau \ (\tau = 1, 2, \ldots), \quad \mathfrak{a} = \bigcap_\tau \mathfrak{a}'_\tau = \bigcap_\tau \mathfrak{b}'_\tau = \mathfrak{b}.$$

---

[43]) Nichtmaximal natürlich nur dann, wenn P kein Körper ist, d. h. wenn wir nicht den in den früheren Nummern bereits erledigten Fall vor uns haben.

[44]) Es sei nämlich $\bar{\mathfrak{p}} < \bar{\mathfrak{p}}_1 < \bar{\mathfrak{p}}_2$, wobei $\bar{\mathfrak{p}}_i$ $(\mu - i)$-dimensional ist $(i = 1, 2)$. Gehört dann $\bar{\mathfrak{p}}_1$ nicht zu $\bar{\mathfrak{a}}$, so kann man $\bar{\mathfrak{p}}_1 = \bar{\mathfrak{q}}$ setzen. Im andern Falle seien $\bar{\mathfrak{p}}_1 = \bar{\mathfrak{p}}^{(1)}, \bar{\mathfrak{p}}^{(2)}, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}^{(\omega)}$ alle zu $\bar{\mathfrak{a}}$ gehörigen $(\mu - 1)$-dimensionalen Primideale, $\overline{\varphi}$ sei eine in $\bar{\mathfrak{p}}_2$, aber in keinem $\bar{\mathfrak{p}}^{(i)}$ enthaltene Form. Dann besitzt $\bar{\mathfrak{p}} + (\overline{\varphi})$ ein in $\bar{\mathfrak{p}}_2$ enthaltenes minimales Primoberideal $\bar{\mathfrak{q}}$, und es muß $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{\mathfrak{p}}_2$ verschieden, und damit $(\mu - 1)$-dimensional sein, weil $\bar{\mathfrak{q}}/\bar{\mathfrak{p}}$ in $\overline{\mathfrak{R}}/\bar{\mathfrak{p}}$ als minimales Primoberideal eines Hauptideals den Dimensionsdefekt 1 besitzt, während $\bar{\mathfrak{p}}_2/\bar{\mathfrak{p}}$ den Dimensionsdefekt 2 hat.

Zur Anwendung der Sätze von Nr. 8 auf *Formenideale* beachte man: Die Betrachtung von Formenidealen in $\mathfrak{P}$ ist gleichwertig mit der Beschränkung auf „H-Ideale", d. h. auf solche gewöhnlichen $\mathfrak{P}$-Ideale, die eine aus homogenen Formen bestehende Basis besitzen. Ist $\bar{\mathfrak{c}}$ ein H-Ideal, so sind, wie leicht zu zeigen, auch alle minimalen Primoberideale von $\bar{\mathfrak{c}}$ H-Ideale.

[45]) Man beachte, daß p^{-1} eindeutig als Potenzreihe in $x_1, \ldots, x_n$ über P_τ dargestellt werden kann, falls p eine Reihe aus $\mathfrak{R}$ mit nicht zu $\mathfrak{m}_\tau^0$ gehörigem Anfangsglied ist.

Die Übertragung von Satz 4 ist trivial. Bei Satz 5 hat man nur zu beachten: Ist $\bar{\mathfrak{a}}$ ein zu $\overline{\mathfrak{m}}_\tau$ gehöriges Primärideal, so wird $\mathfrak{a}'_\sigma = \mathfrak{R}_\sigma$ $(\sigma \neq \tau)$, während $\bar{\mathfrak{a}}_\tau$ ein zu $\overline{\mathfrak{m}}'_\tau$ gehöriges Primärideal darstellt. Daraus folgt weiter wie in Nr. **2**, daß $\mathfrak{a}'_\tau$ ein zu $\mathfrak{m}'_\tau$ gehöriges Primärideal sein muß, und damit erweist sich sofort $\mathfrak{a}_\tau = \mathfrak{a}'_\tau \cap \mathfrak{R}$ als ein zu $\mathfrak{m}_\tau$ gehöriges Primärideal.

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse kann man, ohne an den in Nr. **3** ausführlicher entwickelten Überlegungen etwas Nennenswertes ändern zu müssen, den Hauptsatz 8 für den Fall eines Potenzreihenringes $\mathfrak{R}_\tau$ über einem Stellenring P_τ beweisen. Daraus schließt man aber sofort allgemein

Satz 24. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus dem Potenzreihenringe* $\mathfrak{R}$ *hat stets dieselbe Dimension wie sein zugehöriges Leitideal* $\bar{\mathfrak{a}}$.

(Dabei ist auch der — nach den Ergebnissen von Nr. **8** durchaus mögliche — Fall unendlicher Dimension einzuschließen.) — Zum Beweis hat man nur zu beachten: Die Dimension von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$ (von $\bar{\mathfrak{a}}$ in $\mathfrak{P}$) ist gleich der oberen Grenze der Dimensionen der Ideale $\mathfrak{a}_\tau$ in $\mathfrak{R}_\tau$ ($\bar{\mathfrak{a}}_\tau$ in $\mathfrak{P}_\tau$). Die Gültigkeit von Satz 24 für alle $\mathfrak{R}_\tau$ zieht also unmittelbar die Gültigkeit dieses Satzes für $\mathfrak{R}$ selbst nach sich.

Mit Hilfe von Satz 24 können auch die Sätze 9 und 10 mühelos auf unsere Potenzreihenringe übertragen werden, Satz 9 unter Beschränkung auf endliche Dimensionen. An eine Übertragung des Satzes 11 ist natürlich nicht zu denken. Denn die A-Formen der Elemente des Potenzreihenringes $\mathfrak{R}$ sind ja immer eindeutig bestimmt, selbst dann, wenn kein einziger Stellenring $\mathfrak{R}_\tau$ ein p-Reihenring ist [46]).

10. Ein Spezialfall.

Um die Ergebnisse von Nr. **9** an einem einfachen Beispiel zu verdeutlichen, betrachten wir den Ring $\mathfrak{R}$ aller formalen Potenzreihen [47]) in $x_1, \ldots, x_n$ über einem „Z.P.I.-Ring" P, in dem sich wie in der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers jedes Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen endlich vieler, paarweise teilerfremder Primideale darstellen läßt. Die Ringe P_τ sind in diesem Falle diskrete Bewertungsringe, d. h. es sind in jedem P_τ alle Elemente bis auf Einheitsfaktoren Potenzen eines festen Primelements π_τ. Es wird also (bei Benutzung der in Nr. **9** eingeführten Bezeichnungen) $\mathfrak{m}^0_\tau \cdot \mathsf{P}_\tau = (\pi_\tau) \cdot \mathsf{P}_\tau$ und damit

$$\mathfrak{m}'_\tau = (x_1, \ldots, x_n, \pi_\tau) \cdot \mathfrak{R}_\tau \text{ für jedes } \tau.$$

Daraus folgt sofort

Satz 25. *Ist* P *ein Z.P.I.-Ring, so sind die Ringe* $\mathfrak{R}_\tau$ *durchweg p-Reihenringe.*

In der Tat, nach den Ergebnissen von Nr. **1**—Nr. **4** gilt für den Dimensionsdefekt ν_τ von $\mathfrak{m}'_\tau$ in $\mathfrak{R}_\tau$ die Ungleichung $\nu_\tau \leqq n+1$, und es kann nur dann $\nu_\tau = n+1$ sein, wenn $\mathfrak{R}$ ein p-Reihenring ist. Man sieht aber sofort, daß in $\mathfrak{R}_\tau$ die Ideale

$$\mathfrak{p}^{(n+1)} = \mathfrak{m}'_\tau = (x_1, \ldots, x_n, \pi_\tau),\ \mathfrak{p}^{(i)} = (x_1, \ldots, x_i)\ \ (i = n, n-1, \ldots, 1),\ \mathfrak{p}^{(0)} = (0)$$

eine $(n+2)$-gliedrige Primunteridealkette bilden.

Aus der Tatsache, daß jedes $\mathfrak{R}_\tau$ ein p-Reihenring mit $(n+1)$-dimensionalem Nullideal ist, folgt leicht nach Satz 11:

Satz 26. *Ist* P *ein Z.P.I.-Ring, so ist bei jedem* $\mathfrak{R}$*-Primideal* $\mathfrak{p}$ *die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt genau gleich* $n+1$.

---

[46]) Ein gewisser Zusammenhang zwischen der Theorie der Potenzreihenringe und der der p-Reihenringe wird allerdings durch den folgenden Satz hergestellt, den wir in Nr. **10** im einfachsten Spezialfall ausführlich beweisen werden: Sind alle Ringe P_τ p-Reihenringe, so sind es auch alle Ringe $\mathfrak{R}_\tau$, und zwar hat eine Minimalbasis von $\mathfrak{m}'_\tau$ in $\mathfrak{R}_\tau$ genau $m_\tau + n$ verschiedene Glieder, falls n die Variablenzahl, m_τ die Gliederzahl einer Minimalbasis von $\mathfrak{m}^0_\tau$ bedeutet. (Allgemeiner Beweis nicht wesentlich schwieriger als der Beweis des Spezialfalls in Nr. **10**.)

[47]) Es könnte auch ein beliebiger, den Bedingungen a), b), c) von Nr. **9** genügender Potenzreihenring über dem Z.P.I.-Ring P gewählt werden.

Denn die Behauptung von Satz 26 ist offenbar richtig für jedes $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$, falls sie bei beliebigem τ für jedes $\mathfrak{R}_\tau$-Primideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_\tau$ gilt.

Es sei $\mathfrak{P}_\tau = \mathsf{P}_\tau[x_1, \ldots, x_n]$ wie in Nr. 9 der Polynomring in $x_1, \ldots, x_n$ über P_τ, und es bedeute $\mathfrak{Q} = \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ den entsprechenden Polynomring über dem gemeinsamen Quotientenkörper K aller P_τ; unter $\bar{\mathfrak{p}}'_\tau = (p) \cdot \mathfrak{P}_\tau$ möge ein Primhauptideal aus $\mathfrak{P}_\tau$ verstanden werden. *Dann hat $\bar{\mathfrak{p}}'_\tau$ stets die Dimension n.* — In der Tat, ist p ein Element aus P_τ und damit $\bar{\mathfrak{p}}'_\tau = (\pi_\tau) \cdot \mathfrak{P}_\tau$, so ist die Behauptung selbstverständlich; denn es ist in diesem Fall die Dimension von $\bar{\mathfrak{p}}'_\tau$ gleich der Dimension des Nullideals im Polynomring $\mathsf{K}_\tau[x_1, \ldots, x_n]$ über dem Restklassenkörper $\mathsf{K}_\tau = \mathsf{P}_\tau/(\pi_\tau)$. Ist aber p eine Form positiven Grades, so bedeute $\bar{\mathfrak{q}}^{(0)}$ das Primhauptideal $\bar{\mathfrak{p}}_\tau \cdot \mathfrak{Q}$ aus $\mathfrak{Q}$, und es sei

$$\bar{\mathfrak{q}}^{(0)} < \bar{\mathfrak{q}}^{(1)} < \cdots < \bar{\mathfrak{q}}^{(n-1)} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathfrak{Q}$$

eine (in $\mathfrak{Q}$ sicher vorhandene) n-gliedrige Primoberidealkette mit dem Anfangsglied $\bar{\mathfrak{q}}^{(0)}$ [48]). Setzt man dann

$$\bar{\mathfrak{p}}_\tau^{(i)'} = \bar{\mathfrak{q}}^{(i)} \cap \mathfrak{P}_\tau \; (i = 0, \ldots, n-1), \quad \bar{\mathfrak{p}}_\tau^{(n)'} = (x_1, \ldots, x_n, \pi_\tau) \cdot \mathfrak{P}_\tau,$$

so wird

$$\bar{\mathfrak{p}}'_\tau = \bar{\mathfrak{p}}_\tau^{(0)'} < \bar{\mathfrak{p}}_\tau^{(1)'} < \cdots < \bar{\mathfrak{p}}_\tau^{(n)'}$$

eine $(n+1)$-gliedrige Primoberidealkette in $\mathfrak{P}_\tau$.

Das Ideal $\bar{\mathfrak{h}}$ aus dem Polynomring $\mathfrak{P} = \mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$ soll *Quasihauptideal* heißen [49]), wenn ein Ideal $\mathfrak{a}^0 \neq (0)$ aus P so bestimmt werden kann, daß $\mathfrak{a}^0 \cdot \bar{\mathfrak{h}}$ in $\mathfrak{P}$ ein Hauptideal wird. Ist $\bar{\mathfrak{h}}$ ein Quasihauptideal, so stellt $\bar{\mathfrak{h}}'_\tau = \bar{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{P}_\tau$ für jedes τ ein Hauptideal dar. Mit Hilfe dieser Bemerkung und des für die Primhauptideale der Ringe $\mathfrak{P}_\tau$ geltenden Dimensionssatzes beweist man leicht das folgende, für die Teilbarkeitstheorie des Potenzreihenringes $\mathfrak{R}$ grundlegende „Lemma“ [13]):

Satz 27. *Es sei $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal aus $\mathfrak{R}$, dessen Leitideal $\bar{\mathfrak{p}}$ einen echten (von $\mathfrak{P}$ selbst verschiedenen) Quasihauptidealfaktor $\bar{\mathfrak{h}}$ besitzt. Dann hat $\mathfrak{p}$ die Dimension n, und es besitzt infolgedessen $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ kein von (0) verschiedenes echtes Primunterideal.*

In der Tat, nach Satz 24 haben $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ dieselbe Dimension. Es sei nun τ so gewählt, daß $\bar{\mathfrak{h}} < \overline{\mathfrak{m}}_\tau$ und infolgedessen $\bar{\mathfrak{h}}'_\tau = \bar{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{P}_\tau$ ein von $\mathfrak{P}_\tau$ verschiedenes Hauptideal ist. Dann hat das Leitideal $\bar{\mathfrak{p}}'_\tau = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{P}_\tau$ von $\mathfrak{p}'_\tau = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_\tau$ den echten Hauptidealfaktor $\bar{\mathfrak{h}}'_\tau$ und wegen der in $\mathfrak{P}_\tau$ möglichen eindeutigen Primelementzerlegung besitzt $\bar{\mathfrak{p}}'_\tau$ sogar einen Primhauptidealfaktor. Daraus folgt, daß die Dimension von $\bar{\mathfrak{p}}'_\tau$ und damit erst recht die von $\bar{\mathfrak{p}}$ gleich n sein muß [50]). Fertig!

---

[48]) Natürlich handelt es sich um eine Kette aus Formenidealen!

[49]) Zum Begriff des Quasihauptideals vgl. die in Anm. [13]) genannte Arbeit sowie die dort in Anm. [1]) angegebene Literatur.

[50]) Man beachte, daß zum Beweis von Satz 24 nur Satz 7, nicht aber die (verhältnismäßig tiefer liegenden) Sätze der p-Reihenring-Theorie und insbesondere nicht die Sätze 25 und 26 notwendig sind. Denn bereits aus Satz 7 folgt, daß in keinem $\mathfrak{R}_\tau$ und damit selbstverständlich auch nicht in $\mathfrak{R}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ von der Dimension n ein von (0) verschiedenes echtes Primunterideal haben kann.

Eingegangen 3. März 1938.

Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen.

Von *M. Eichler* in Göttingen.

Einleitung.

Der Ausgangspunkt der nachstehenden Untersuchungen war die Frage: Gibt es in einer normalen einfachen Algebra über einem algebraischen Zahlkörper[1]) Zahlen, die nach einem festen Ideal einer festen Zahl kongruent sind und eine geeignet vorgegebene Norm bezüglich des Zentrums haben?

Diese Frage läßt sich verschieden scharf stellen. Die schwächere, aber auch die zugänglichere Formulierung erhält man, indem man die Ideale der Algebra in „Strahlklassen" einteilt und dann nach der Bedingung fragt, unter der ein Ideal zu einer „Hauptstrahlklasse" gehört. Hiermit ist der Gegenstand des ersten Teiles (Abschnitt II und III) der vorliegenden Arbeit gekennzeichnet. Es zeigt sich, daß einer Strahlklasseneinteilung in der Algebra eine Strahlklasseneinteilung im Zentrum parallel läuft, so daß für die Äquivalenz der Ideale in der Algebra die Äquivalenz ihrer Normen im Zentrum maßgebend ist; diese Tatsache wird durch die Sätze 1 und 2 ausgedrückt und soll den Namen „spezielles Normenäquivalenzkriterium" erhalten. Die Strahlklassen lassen sich, genau wie man es für Zahlkörper kennt, zu „allgemeinen Kongruenzklasseneinteilungen" vergröbern, und man erhält für diese, dem speziellen Normenäquivalenzkriterium für die Strahlklasseneinteilungen entsprechend, das „allgemeine Normenäquivalenzkriterium" (Satz 3); es gilt allerdings nur für gewisse Kongruenzklasseneinteilungen.

Die schärfere Fassung der oben aufgeworfenen Frage beantwortet der (ohne weitere Erklärung verständliche) „Normensatz für die arithmetische Progression" (Satz 5 in Abschnitt IV, § 10). Von diesem Satz aus kann man einerseits leicht auf das Normenäquivalenzkriterium zurückkommen, andererseits eröffnet sich durch ihn ein Zugang zur Einheitentheorie: man bekommt nämlich einen Einblick in das Kongruenzverhalten der Einheiten nach gleichseitigen Idealen.

Im Schlußabschnitt stelle ich die L-Reihen für die hier vorgenommenen Kongruenzklasseneinteilungen auf und beweise für sie zwei Funktionalgleichungen (§ 12, § 17), die den beiden Funktionalgleichungen für die Zetafunktion hinsichtlich ihres Baues und

[1]) Eine spezielle Klasse von Algebren, nämlich die der total definiten Quaternionenalgebren, wird bei der Beantwortung dieser Frage durchweg ausgeschlossen; mit anderen Worten: ich beschränke mich im folgenden auf Algebren, die die Voraussetzung $\mathfrak{R}$ in § 1 erfüllen. Die total definiten Quaternionenalgebren, dadurch definiert, daß sie diese Voraussetzung nicht erfüllen, weisen hinsichtlich der hier verfolgten Problemstellung keine klaren Gesetzmäßigkeiten auf. Vgl. M. Eichler, Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren, Math. Zeitschr. **43** (1937), S. 102—109.

ihres Beweises entsprechen. Der Vergleich beider Funktionalgleichungen liefert neben einer Identität für die hyperkomplexen „Gaußschen Summen“ (§ 18) eine Formel für die „Führer“ der Kongruenzklassen (Satz 4).

Es darf schließlich noch auf zwei Nebenergebnisse aufmerksam gemacht werden, deren Beweise in diesen Zusammenhang gehören: nämlich auf den Satz 6, eine Folgerung aus Satz 5, welcher eine umfangreiche Klasse von Algebren angibt, in welchen der Euklidische Algorithmus gilt, und auf den Satz 7, eine Folgerung aus der ersten Funktionalgleichung der L-Reihen, welcher besagt, daß unter der Voraussetzung $\mathfrak{R}$ die Residuen der Zetafunktionen sämtlicher Idealklassen bei $s = 1$ gleich ausfallen. (Der Satz 7 könnte, wie bekannt, auch als eine Aussage über die Einheitengruppen in verschiedenen Maximalordnungen ausgesprochen werden.)

I. Bezeichnungen und Hilfssätze.

§ 1. *Ergebnisse einer früheren Arbeit.*

$\mathfrak{A}$ sei eine normale einfache Algebra vom Grade n über einem algebraischen Zahlkörper K. Mit $\mathfrak{u}$ werde das Produkt der unendlichen in $\mathfrak{A}/K$ verzweigten Primstellen von K bezeichnet. An $\mathfrak{A}$ wird durchweg die folgende Bedingung gestellt:

Voraussetzung $\mathfrak{R}$. *Es sei entweder $n > 2$ oder $\mathfrak{u}$ umfasse nicht sämtliche unendlichen Primstellen von K.*

Bezeichnungsnormen. Lateinische Buchstaben bezeichnen Zahlen aus K, speziell also auch rationale Zahlen, kleine griechische sind i. a. für Zahlen aus $\mathfrak{A}$ reserviert. Ideale aus K erhalten kleine Frakturbuchstaben, Ideale aus $\mathfrak{A}$ große Frakturbuchstaben; und zwar sollen die letzteren mit Doppelindizes geschrieben werden, bis auf die Maximalordnungen, die mit $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots$ also mit einfachen Indizes bezeichnet seien. Dabei sind $\mathfrak{J}_i$ und $\mathfrak{J}_k$ stets Links- und Rechtsordnung des Ideals $\mathfrak{N}_{ik}$.

Die $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungen von Idealen und von K und $\mathfrak{A}$ für Primstellen $\mathfrak{p}$ von K erhalten $\mathfrak{p}$ als oberen Index, z. B. $\mathfrak{N}_{12}^{\mathfrak{p}}$, $K^{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{p}}$.

Die Normen von Zahlen α und Idealen $\mathfrak{N}_{12}$ aus $\mathfrak{A}$ bezüglich K werden $n(\alpha)$, $n\mathfrak{N}_{12}$ geschrieben, sie sind stets im Sinne der Hauptgleichung aufzufassen. Sobald von der Norm die Rede ist, soll immer die Norm von A nach K und in diesem Sinne verstanden werden, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes verlangt wird.

Die vorliegende Arbeit schließt sich methodisch eng an eine frühere an[2]), die als bekannt vorausgesetzt werden muß. Das Gerüst für den Beweis des Hauptergebnisses jener Arbeit stelle ich hier noch einmal zusammen, um es im weiteren Verlauf zu mannigfachen Schlußfolgerungen zu benutzen:

Hilfssatz 1. Es sei m eine Zahl aus K und $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{u})$. Es gibt in K ein Polynom $f(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) oberster und unterster Koeffizient von $f(x)$ sind 1 und $(-1)^n m$;

b) $f(x) = 0$ hat an den in $\mathfrak{u}$ aufgehenden unendlichen Primstellen von K keine reellen Wurzeln;

c) $f(x)$ ist an den endlichen Verzweigungsprimstellen von $\mathfrak{A}/K$ irreduzibel.

Dann gilt:

A) $\mathfrak{A}$ enthält eine Wurzel μ von $f(x) = 0$, es ist $n(\mu) = m$ [3]).

B) $\mathfrak{A}$ erfülle die Voraussetzung $\mathfrak{R}$. m sei ganz und $\mathfrak{J}_1$ sei eine feste Maximalordnung von $\mathfrak{A}$. Es gibt eine ganze Zahl R in K, die zu einem beliebig vorgegebenen Ideal prim

---

[2]) M. Eichler, Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme, Math. Zeitschr. **43** (1938), S. 481—494; im folgenden stets zitiert mit I.

[3]) Beweis des Normensatzes: I, S. 486—487.

gewählt werden kann, mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein Polynom $f(x)$ in K, das den Bedingungen a)—c) und den weiteren genügt:

d) $f(x)$ hat ganze Koeffizienten;

und im Falle $m \equiv 1 \pmod{R^n}$

e) $f(x) \equiv (x-1)^n \pmod{R^n}$;

$\mathfrak{J}_1$ enthält eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ [4]).

C) $\mathfrak{A}$ erfülle die Voraussetzung $\mathfrak{R}$. Es sei $m = 1$ und R habe die unter B) angegebene Bedeutung. $\mathfrak{u}$ sei das Produkt der Diskriminante von $\mathfrak{A}$ bezüglich K, von $n!$ und allen den Primidealen aus K, deren Absolutnorm kleiner als $n+2$ ist. $\mathfrak{M}_{1i_a}$ und $\mathfrak{M}_{1j_a}$ seien zwei ganze zu $\mathfrak{u}$ teilerfremde Ideale mit gleicher Norm und Linksordnung, und

$$\mathfrak{M}_{1i_a} = \mathfrak{P}_{1i_2}\mathfrak{P}_{i_2i_3}\cdots\mathfrak{P}_{i_{a-1}i_a}, \qquad \mathfrak{M}_{1j_a} = \mathfrak{Q}_{1j_2}\cdots\mathfrak{Q}_{j_{a-1}j_a}$$

mit

$$n\mathfrak{P}_{i_ki_{k+1}} = n\mathfrak{Q}_{j_kj_{k+1}} = \mathfrak{p}_j \qquad (i_1 = j_1 = 1)$$

sei eine Zerlegung von ihnen in unzerlegbare Faktoren. Dann gibt es Polynome $g_k(x)$ und eine ganze Zahl T in K, die zu einem beliebig vorgegebenen Ideal teilerfremd gewählt werden kann, mit der Eigenschaft: Es existieren Polynome $f_k(x)$ in K, die den Bedingungen a)—e) und den weiteren genügen:

f) $f_k(x) \equiv g_k(x) \pmod{\mathfrak{p}_k}$;

g) $f_k(x) \equiv (x-1)^n \pmod{T^n}$.

Die Linksordnungen $\mathfrak{J}_{i_k}$ der Ideale $\mathfrak{P}_{i_ki_{k+1}}$ enthalten dann Wurzeln ε_k der Gleichungen $f_k(x) = 0$, und es ist

$$\mathfrak{M}_{1i_a} = \mathfrak{M}_{1j_a}\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k \text{ [5])}.$$

D) Die Bedingungen a), b) sind mit jedem System von Kongruenzen für die Koeffizienten von $f(x)$ mit Ausnahme des ersten und letzten verträglich. Die Bedingungen a), b), d) sind es dann und im allgemeinen auch nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ der Voraussetzung $\mathfrak{R}$ genügt [6]).

Hilfssatz 2. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K und $f_\mathfrak{p}(x)$ ein irreduzibles Polynom in $K^\mathfrak{p}$. Dann existiert ein Exponent $h_\mathfrak{p}$ so, daß jedes der Kongruenz

$$f(x) \equiv f_\mathfrak{p}(x) \pmod{\mathfrak{p}^{h_\mathfrak{p}}}$$

genügende Polynome in $K^\mathfrak{p}$ dort ebenfalls irreduzibel ist [7]).

§ 2. *Die Gruppen der gleichseitigen Ideale für die einzelnen Maximalordnungen.*

Die gleichseitigen Ideale für eine feste Maximalordnung $\mathfrak{J}_1$ bilden bekanntlich eine abelsche Gruppe Γ_1, und zwar sind die Gruppen Γ_1 und Γ_2 für irgend zwei Maximalordnungen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ isomorph; ein gleichseitiges Ideal ist ferner durch seine Norm bezüglich K und die Ordnung, zu der es gehört, eindeutig bestimmt. Ich ordne daher den gleichseitigen Idealen $\mathfrak{F}_{11}, \mathfrak{F}_{22}, \ldots$ mit gleicher Norm für sämtliche Maximalord-

[4]) I, S. 493—494. Dort genügt $f(x)$ zwar noch engeren Bedingungen, die aber zum Beweise der hier ausgesprochenen weniger speziellen Behauptung nicht gebraucht werden.

[5]) I, Hilfssatz 5; man beachte besonders die Art seiner Herleitung aus Hilfssatz 6 (S. 488—489), sowie den Beweis des letzteren (S. 489—494).

[6]) I, S. 486—487.

[7]) M. Eichler, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, Journ. reine u. angew. Math. **176** (1936), S. 192—202.

nungen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots$ ein Symbol $\mathfrak{F}$ zu, welches das *zu* jedem der $\mathfrak{F}_{ii}$ *gehörige Idealsystem* heißen soll. Werden den Idealen $\mathfrak{F}_{11}, \mathfrak{F}'_{11}$ die Idealsysteme $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ zugeordnet, so werde das Produkt $\mathfrak{F}\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'\mathfrak{F}$ als dasjenige Idealsystem erklärt, das zu $\mathfrak{F}_{11}\mathfrak{F}'_{11} = \mathfrak{F}'_{11}\mathfrak{F}_{11}$ gehört. Die Idealsysteme bilden dann eine mit sämtlichen Γ_i isomorphe Gruppe. Idealsysteme werden immer mit dem gleichen Buchstaben wie die Ideale, zu denen sie gehören, bezeichnet, nur der Index wird fortgelassen. Ist $\mathfrak{f}$ ein Ideal aus K, so darf das zu $\mathfrak{J}_1\mathfrak{f}$ gehörige Idealsystem auch mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet werden.

Umgekehrt möge $\mathfrak{F}_{11} = \mathfrak{J}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{J}_1$ für das Ideal geschrieben werden, zu dem $\mathfrak{F}$ gehört. Zür beliebige Ideale $\mathfrak{N}_{12}$ kann in diesem Sinne geschrieben werden:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12} = \mathfrak{N}_{12}\mathfrak{F}.$$

Die Begriffe „ganz", „teilbar", „Vielfaches", „größter gemeinsamer Teiler", „kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches" und ähnliche Begriffe übertragen sich in selbstverständlicher Weise von den Idealen auf die Idealsysteme. Insbesondere läßt sich auch die Norm $n\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{F}$ bezüglich K als das Idealsystem erklären, das zu $\mathfrak{J}_1 n\,\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$ gehört.

Es sei $\mathfrak{F}$ ein ganzes Idealsystem; dann soll ein ganzes oder gebrochenes Ideal $\mathfrak{N}_{12}$ zu $\mathfrak{F}$ *teilerfremd* oder *prim* heißen, wenn für jedes in $n\mathfrak{F}$ aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ von K die Gleichheit $\mathfrak{N}_{12}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}$ (und folglich $\mathfrak{N}_{12}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_2^{\mathfrak{p}}$) besteht. Sind $\mathfrak{N}_{12}$ und $\mathfrak{N}_{23}$ zu $\mathfrak{F}$ prim, so ist es auch $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ und $\mathfrak{N}_{12}\mathfrak{N}_{23}$. Die zu $\mathfrak{F}$ primen Ideale aus $\mathfrak{A}$ zerfallen mithin in elementfremde maximale Teilgruppoide in dem Gruppoid sämtlicher Ideale. Mit ihnen haben wir es im folgenden zu tun, wir nennen sie die *zu* $\mathfrak{F}$ *gehörigen Abteilungen* und bezeichnen sie mit $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$.

Hilfssatz 3. Alle zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Abteilungen gehen aus einer festen von ihnen durch Transformation mit Zahlen α aus $\mathfrak{A}$ hervor.

Beweis. Es sei $\mathfrak{J}_1$ eine Maximalordnung aus einer festen Abteilung $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$, dann ist $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$ als die Menge der Ideale $\mathfrak{N}_{ik}$ definiert, für welche $\mathfrak{N}_{ik}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}$ für alle in $n\mathfrak{F}$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ von K gilt. Es sei nun $\mathfrak{J}_2$ eine beliebige andere Maximalordnung, dann gibt es in den Algebren $\mathfrak{A}^{\mathfrak{p}}$ Zahlen $\alpha_{\mathfrak{p}}$, so daß $\alpha_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_2^{\mathfrak{p}}$ ist. $\mathfrak{B}_{12}$ bezeichne das Ideal, dessen $\mathfrak{p}$-Komponenten $\mathfrak{B}_{1i}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p}|n\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{B}_{1i}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p} \nmid n\mathfrak{F}$ sind. Es gibt jetzt eine Zahl α in $\mathfrak{B}_{1i}$, für die $\dfrac{n(\alpha)}{n\mathfrak{B}_{1i}}$ zu $\mathfrak{F}$ prim ist, und es ist für die in $n\mathfrak{F}$ aufgehenden $\mathfrak{p}$ auch $\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\alpha = \mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}}$ und $\alpha^{-1}\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\alpha = \mathfrak{J}_2^{\mathfrak{p}}$. Die Ideale aus $\alpha^{-1}\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}\alpha$ bilden jetzt wieder eine Abteilung, sie enthält $\mathfrak{J}_2$ und ist von $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$ verschieden, falls $\mathfrak{J}_2$ nicht in $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$ enthalten war. So läßt sich nach und nach die Gesamtheit der zu $\mathfrak{F}$ teilerfremden Ideale aus $\mathfrak{A}$ ausschöpfen.

II. Definition der allgemeinen Kongruenzklassen und ihrer Führer.

§ 3. *Strahlklassen.*

Es sei $\mathfrak{F}$ ein ganzes Idealsystem und $\mathfrak{J}_1$ eine Maximalordnung. Gilt für eine Zahl α aus $\mathfrak{A}$ die Gleichung $\alpha = \beta^{-1}\gamma$, mit β und γ in $\mathfrak{J}_1$, sind β und γ prim zu $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$, und ist $\beta \equiv \gamma (\mathrm{mod}\ \mathfrak{J}_1\mathfrak{F})$, so werde

$$\alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\ \mathfrak{J}_1\mathfrak{F})$$

geschrieben und von einer *multiplikativen Kongruenz* gesprochen. Die Definition allgemeinerer multiplikativer Kongruenzen ist für das Folgende nicht erforderlich. Im Kleinen bedeuten solche multiplikativen Kongruenzen nichts anderes als gewöhnliche Kongruenzen; gilt die obige multiplikative Kongruenz überall im Kleinen, so folgt, daß sie auch im Großen gilt.

Zwei Ideale $\mathfrak{N}_{i_1 i_2}$ und $\mathfrak{N}_{i_3 i_4}$ heißen *äquivalent mod* $\mathfrak{F}$, wenn es Zahlen

$$\sigma_{i_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_1}\mathfrak{F}),\ \sigma_{i_2} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_2}\mathfrak{F}),\ \sigma_{i_3} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_3}\mathfrak{F}),\ \sigma_{i_4} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_4}\mathfrak{F})$$

mit

$$\sigma_{i_1} \mathfrak{N}_{i_1 i_2} \sigma_{i_2} = \sigma_{i_3} \mathfrak{N}_{i_3 i_4} \sigma_{i_4}$$

gibt. Dann ist auch

$$\mathfrak{N}_{i_1 i_2} = \sigma_{i_1}^{-1} \sigma_{i_3} \mathfrak{N}_{i_3 i_4} \sigma_{i_4} \sigma_{i_2}^{-1}$$

mit

$$\sigma_{i_1}^{-1}\sigma_{i_3} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_1}\mathfrak{F}),\ \sigma_{i_1}^{-1}\sigma_{i_3} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_3}\mathfrak{F}),\ \sigma_{i_4}\sigma_{i_2}^{-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_2}\mathfrak{F}),\ \sigma_{i_4}\sigma_{i_2}^{-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}^{\cdot}\, \mathfrak{J}_{i_4}\mathfrak{F}).$$

Speziell für $\mathfrak{J}_{i_1} = \mathfrak{J}_{i_3}$ oder $\mathfrak{J}_{i_2} = \mathfrak{J}_{i_4}$ sollen $\mathfrak{N}_{i_1 i_2}$ und $\mathfrak{N}_{i_3 i_4}$ *linksäquivalent* oder *rechtsäquivalent mod* $\mathfrak{F}$ heißen. Die Gesamtheiten mod $\mathfrak{F}$ äquivalenter, linksäquivalenter oder rechtsäquivalenter Ideale werden *Strahlklassen*, *Linksstrahlklassen* oder *Rechtsstrahlklassen mod* $\mathfrak{F}$ genannt.

Aus einer Kongruenz $\alpha \equiv \beta (\mathrm{mod}\ \mathfrak{J}_1\mathfrak{F})$ mit α und β in $\mathfrak{J}_1$ nach einem ganzen gleichseitigen Ideal $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$ folgt für die Normen die Kongruenz $n(\alpha) \equiv n(\beta)$ (mod $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$). Ein ganzes Idealsystem $\mathfrak{F}$ bestimmt mithin eindeutig ein ganzes Ideal $\mathfrak{f}$ in K, so daß die Kongruenz zweier Zahlen in $\mathfrak{J}_1$ mod $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$ die Kongruenz ihrer Normen mod $\mathfrak{f}$ nach sich zieht. Was für gewöhnliche Kongruenzen gilt, folgt sofort für die oben definierten multiplikativen Kongruenzen.

$\mathfrak{F}$ geht in $\mathfrak{f}$ auf, und umgekehrt geht $\mathfrak{f}$ in $n\mathfrak{F}$ auf, so daß die Gesamtheiten der in $\mathfrak{f}$ und $n\mathfrak{F}$ aufgehenden Primideale von K übereinstimmen.

In das Ideal $\mathfrak{f}$ dürfen die unendlichen in $\mathfrak{A}/K$ verzweigten Primstellen mit aufgenommen werden [8]), denn es gilt $n(\alpha) \equiv 1$ (mod u) für jede Zahl α aus $\mathfrak{A}$.

Eine Bedingung dafür, daß ein Ideal mod $\mathfrak{F}$ seiner Linksordnung linksäquivalent oder seiner Rechtsordnung rechtsäquivalent ist — es soll alsdann ein *Hauptideal* $\mathfrak{F}$ heißen — gibt der folgende Satz an; daß die in ihm genannte Bedingung notwendig ist, haben wir soeben erkannt, daß sie auch hinreicht, wird im Abschnitt III bewiesen.

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{F}$ *ein ganzes Idealsystem in einer die Voraussetzung* $\mathfrak{R}$ *erfüllenden Algebra* $\mathfrak{A}$. *Dann bestimmt* $\mathfrak{F}$ *einen Divisor* $\mathfrak{f}$ *in* K *derart, daß ein Ideal aus* $\mathfrak{A}$ *dann und nur dann ein Hauptideal mod* $\mathfrak{F}$ *ist, wenn seine Norm in* K *ein Hauptideal mod* $\mathfrak{f}$ *ist* [9]).

Eine wichtige Folgerung hieraus ist

Satz 2. *Erfüllt* $\mathfrak{A}$ *die Voraussetzung* $\mathfrak{R}$, *so bilden die Strahlklassen der Ideale einer Abteilung* $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$ *mod* $\mathfrak{F}$ *ein Gruppoid* $\Sigma_{\mathfrak{F}}$. *Ist* $\mathfrak{F}'$ *ein beliebiges Vielfaches von* $\mathfrak{F}$, *so bilden auch die Strahlklassen der Ideale einer Abteilung* $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}'}$ *mod* $\mathfrak{F}$ *ein Gruppoid, es ist mit* $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ *isomorph.*

Ideale mit gleicher Links- oder Rechtsordnung sind dann und nur dann linksseitig oder rechtsseitig mod $\mathfrak{F}$ *äquivalent, wenn ihre Normen in* K *mod* $\mathfrak{f}$ *äquivalent sind.*

Folglich ist die Anzahl der Links- oder Rechtsstrahlklassen mod $\mathfrak{F}$ *in* $\mathfrak{A}$, *kurz die Strahlklassenzahl mod* $\mathfrak{F}$, *gleich der Strahlklassenzahl mod* $\mathfrak{f}$ *in* K [10]).

Den mittleren Teil des Satzes 2 nenne ich das *spezielle Normenäquivalenzkriterium.*

---

[8]) Ein formales Produkt endlicher und unendlicher Primteiler soll ein *Divisor* heißen; $\mathfrak{f}$ ist jetzt also kein Ideal mehr, sondern ein Divisor.

[9]) Für den Spezialfall $\mathfrak{F} = \mathfrak{J}$ vgl. I, Satz 1.

[10]) Der erste Teil wird wörtlich wie im Spezialfalle $\mathfrak{F} = \mathfrak{J}$ bewiesen: I, S. 483—484; der zweite und dritte folgt unmittelbar.

§ 4. *Ein Hilfssatz über Gruppoide.*

Unter einer homomorphen Abbildung oder einem Homomorphismus eines Gruppoids Σ mit den Elementen $A, B, C, \ldots$ auf ein Gruppoid Σ' mit den Elementen $A', B', C', \ldots$ werde eine eindeutige Abbildung der $A, B, C, \ldots$ auf die $A', B', C', \ldots$ mit der folgenden Eigenschaft verstanden: Existiert das Produkt $A \cdot B$, und ist es gleich C, so existiert das Produkt $A' \cdot B'$ und ist gleich C'.

Die Elemente A' von Σ' dürfen als die Gesamtheiten (in der Sprache der Gruppentheorie: Komplexe) ihrer Urbildelemente $A_1, A_2, \ldots$ in Σ aufgefaßt werden. Ist ein Homomorphismus H von Σ auf ein drittes Gruppoid Σ'' gegeben, so bildet H die Gesamtheiten der zu den einzelnen Elementen von Σ' gehörigen Elemente von Σ auf Mengen von Elementen von Σ'' ab; diese Elementmengen brauchen aber nicht wieder ein Gruppoid zu bilden, wie wenn $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ Gruppen sind. Bilden diese Elementmengen in Σ'' jedoch ein Gruppoid Σ''', so ist es ein homomorphes Bild von Σ', und der Homomorphismus $\Sigma' \to \Sigma'''$ werde *von H induziert* genannt.

Ich zeige zunächst:

Ein endliches Gruppoid Σ vom Rang r und der Ordnung o läßt sich auf jede Gruppe σ der Ordnung or homomorph abbilden, die eine mit den maximalen in Σ enthaltenen Gruppen isomorphe Untergruppe besitzt.

Beweis. Die einer festen Einheit S_{11} von Σ doppelt zugehörigen Elemente $S_{11}, \ldots, S_{1o}$ bilden eine maximale in Σ enthaltene Gruppe P_1. Σ enthält dann noch r weitere zu S_{11} links zugehörige Elemente $T_{11} = S_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1r}$, so daß jedes Element von Σ eindeutig in der Form $T_{1i}^{-1} S_{1j} T_{1k}$ darstellbar ist. Nun enthält σ nach der Voraussetzung eine mit P_1 isomorphe Gruppe ϱ, und da die Ordnung von σ gleich or sein sollte, hat ϱ in σ den Index r. Es seien $S_1, \ldots, S_o$ alle Elemente von ϱ, und die Zuordnung $S_{1i} \to S_i$ sei eine isomorphe Abbildung von P_1 auf ϱ. Ferner sei

$$\sigma = \varrho T_1 + \cdots + \varrho T_r$$

eine Zerlegung von σ in rechtsseitige Nebengruppen von ϱ. Dann ordne man dem Element $T_{1i}^{-1} S_{1j} T_{1k}$ von Σ das Element $T_i^{-1} S_j T_k$ von σ zu und erhält eine homomorphe Abbildung von Σ auf σ.

Ein Homomorphismus von Σ auf σ der soeben beschriebenen Art, bei dem also die Elemente von Σ, die einer festen Einheit linksseitig (oder rechtsseitig) zugehören, auf die Gesamtheit der Elemente von σ umkehrbar eindeutig abgebildet werden, heiße ein *normaler Homomorphismus*. Ein solcher wird also durch eine isomorphe Abbildung $\mathsf{P}_1 \to \varrho$ und eine umkehrbar eindeutige Abbildung der T_{1i} auf Repräsentanten T_i der rechtsseitigen Nebengruppen von ϱ in σ fixiert. Die Wahl der T_i kann in beliebiger Weise erfolgen. Man sieht so, daß Σ durch σ und ϱ (ja sogar durch ϱ und den Index von ϱ in σ) eindeutig festgelegt wird. Ich nenne Σ, nur um für das folgende einen kurzen Ausdruck zu haben, das *zu σ und ϱ gehörige Normalgruppoid.*

Hilfssatz 4. Ein endliches Gruppoid Σ werde durch einen Homomorphismus H auf eine Gruppe σ abgebildet, und σ möge sich auf eine Gruppe σ' homomorph abbilden lassen. Dann läßt sich Σ auf mindestens ein Gruppoid Σ' so homomorph abbilden, daß der Homomorphismus H von Σ auf σ einen Homomorphismus H' von Σ' auf σ' induziert.

Wird eine maximale in Σ enthaltene Gruppe P_1 auf eine Untergruppe ϱ von σ, und ϱ auf eine Untergruppe ϱ' von σ' abgebildet, und ist H normal, so kann man speziell Σ' isomorph zu dem zu σ' und ϱ' gehörigen Normalgruppoid wählen.

Σ' ist durch H und σ nicht eindeutig festgelegt. In der unten stehenden Abbildung können z. B. σ' und alle eventuell zwischen σ' und Σ' gelegenen Gruppoide die Rolle von Σ' übernehmen.

Beweis. Wie oben seien die Elemente von Σ in der Form $T_{1i}^{-1} S_{1j} T_{1k}$ dargestellt, wobei die S_{1j} eine maximale in Σ enthaltene Gruppe P_1 bilden mögen. H bilde P_1 auf die Untergruppe ϱ von σ ab, und die $S_{1j} T_{1k}$ auf die Elemente aus den rechtsseitigen Nebengruppen $\varrho T_1, \ldots, \varrho T_s$, dabei sollen nur die verschiedenen Nebengruppen gezählt werden.

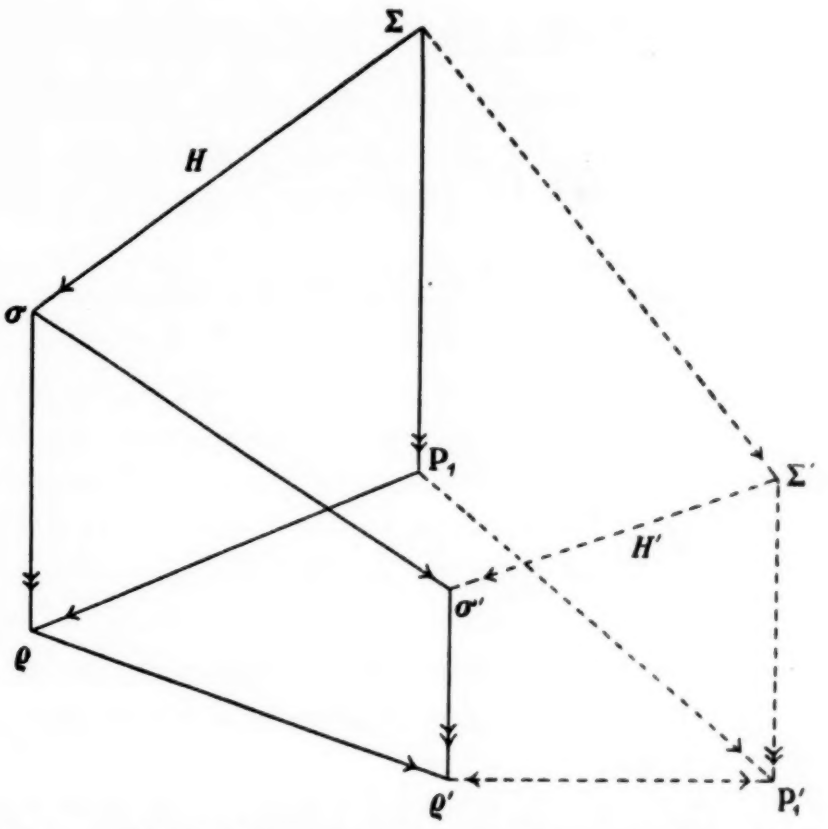

Abbildung. Die Pfeile bedeuten Homomorphismen, die Doppelpfeile bedeuten Enthaltensein. Die ausgezogenen Homomorphismen sind gegeben, die punktierten werden gesucht.

Weil σ homomorphes Bild von Σ ist, gilt

$$\sigma = \sum_{i,k=1}^{s} T_i^{-1} \varrho\, T_k .$$

Bei der Abbildung von σ auf σ' mögen die ϱT_i auf die rechtsseitigen Nebengruppen $\varrho' T_1', \ldots, \varrho' T_{r'}'$ abgebildet werden, auch jetzt werden nur die verschiedenen gezählt. Weil σ' ein homomorphes Bild von σ ist, gilt

$$\sigma' = \sum_{i,k=1}^{r'} T_1'^{-1} \varrho'\, T_k' .$$

Man ordne nun sämtlichen Elementen $S_1', \ldots, S_{o'}'$ von ϱ' und den irgendwie fest gewählten Repräsentanten $T_1', \ldots, T_{r'}'$ der Nebengruppen von ϱ' in σ' Symbole $S_{11}', \ldots, S_{1o'}', T_{11}', \ldots, T_{1r'}'$ zu, die der folgenden Kompositionsvorschrift genügen: Die Produkte $T_{1i}'^{-1} S_{1j}' T_{1k}'$ existieren, und es ist

$$T_{1i}'^{-1} S_{1j}' T_{1k}' \cdot T_{1l}'^{-1} S_{1m}' T_{1n}' \begin{cases} = T_{1i}'^{-1} S_{1j}' S_{1m}' T_{1n}' & \text{für } k = l \\ \text{nicht erklärt} & \text{für } k \neq l. \end{cases}$$

Die $T_{1i}'^{-1} S_{1j}' T_{1k}'$ bilden dann ein mit Σ homomorphes Gruppoid Σ' vom Rang r' und der Ordnung o', und die Abbildung $T_{1i}'^{-1} S_{1j}' T_{1k}' \to T_i'^{-1} S_j' T_k'$ ist ein von H induzierter Homomorphismus H' von Σ' auf σ'.

Ist H normal, so ist s gleich dem Rang r von Σ und

$$\sigma = \sum_{k=1}^{r} \varrho T_k .$$

Dann ist auch

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{r'} \varrho T'_k,$$

und Σ' ist definitionsgemäß dem zu σ' und ϱ' gehörigen Normalgruppoid isomorph.

§ 5. *Allgemeine Kongruenzklassen.*

Wie in algebraischen Zahlkörpern definiert man allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen durch Vergröberungen der Strahlklasseneinteilungen, indem man die Strahlklassengruppoide $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ homomorph auf alle möglichen Gruppoide $\Pi_{\mathfrak{F}}$ mit kleinerer Elementzahl abbildet.

Nach Satz 2 erzeugt die Normenbildung für die Ideale aus $\mathfrak{A}$ bezüglich K einen normalen Homomorphismus des Strahlklassengruppoids $\Sigma_{\mathfrak{f}}$ mod $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{A}$ auf die Strahlklassengruppe $\sigma_{\mathfrak{f}}$ mod $\mathfrak{f}$ in K. Dabei möge eine maximale in $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ enthaltene Gruppe $\Phi_{1\mathfrak{F}}$ isomorph auf eine Untergruppe $\varphi_{\mathfrak{f}}$ von $\sigma_{\mathfrak{f}}$ abgebildet werden, so daß also $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ das zu $\sigma_{\mathfrak{f}}$ und $\varphi_{\mathfrak{f}}$ gehörige Normalgruppoid ist. Besonderes Interesse beanspruchen die folgenden Kongruenzklassengruppoide $\Pi_{\mathfrak{F}}$: Es werde $\sigma_{\mathfrak{f}}$ homomorph auf eine allgemeine Kongruenzklassengruppe $\pi_{\mathfrak{f}}$ abgebildet, dabei gehe $\varphi_{\mathfrak{f}}$ in die Untergruppe $\psi_{\mathfrak{f}}$ von $\pi_{\mathfrak{f}}$ über; $\Pi_{\mathfrak{F}}$ sei das zu $\pi_{\mathfrak{f}}$ und $\psi_{\mathfrak{f}}$ gehörige Normalgruppoid, das nach Hilfssatz 4 ein homomorphes Bild von $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ ist und durch die Normenbildung normal homomorph auf $\pi_{\mathfrak{f}}$ abgebildet wird. Ein solches Gruppoid $\Pi_{\mathfrak{F}}$ soll *normgebunden* heißen, weil für es das „allgemeine Normenäquivalenzkriterium“ (s. u.) gilt.

Die Definition der Begriffe „äquivalent hinsichtlich $\Pi_{\mathfrak{F}}$“, „linksäquivalent hinsichtlich $\Pi_{\mathfrak{F}}$“, usw. ist selbstverständlich und braucht nicht im einzelnen durchgeführt zu werden. Ein Analogon zu dem Begriff der Idealgruppe in Zahlkörpern, als der Gesamtheit der Hauptideale hinsichtlich der vorliegenden Kongruenzklasseneinteilung, existiert im Hyperkomplexen i. a. nicht.

Als Folge der Definition der Normgebundenheit ergibt sich

Satz 3. *$\mathfrak{A}$ erfülle die Voraussetzung $\mathfrak{R}$. Dann definiert die Normenbildung bezüglich K einen normalen Homomorphismus eines jeden normgebundenen Kongruenzklassengruppoids $\Pi_{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{A}$ auf eine Kongruenzklassengruppe $\pi_{\mathfrak{f}}$ in K. Umgekehrt gibt es zu jedem $\pi_{\mathfrak{f}}$ genau ein normgebundenes $\Pi_{\mathfrak{F}}$ mit dieser Eigenschaft.*

Ideale in $\mathfrak{A}$ mit gleicher Linksordnung (oder Rechtsordnung) sind dann und nur dann linksäquivalent (oder rechtsäquivalent) hinsichtlich eines normgebundenen $\Pi_{\mathfrak{F}}$, wenn ihre Normen in K hinsichtlich des zugehörigen $\pi_{\mathfrak{f}}$ äquivalent sind.

Den zweiten Teil dieses Satzes nenne ich das *allgemeine Normenäquivalenzkriterium*. Es weist eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Zerlegungsgesetz der Klassenkörpertheorie auf: Die Gruppe $\pi_{\mathfrak{f}}$ beschreibt nämlich erstens die Zerlegung der Primideale in dem zu $\pi_{\mathfrak{f}}$ gehörigen Klassenkörper P/K und zweitens die Verteilung der Ideale gegebener Norm auf die Kongruenzklassen hinsichtlich $\Pi_{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{A}$; in beiden Fällen kann man also innere Eigenschaften (von P und $\mathfrak{A}$) bereits in K mittels der Gruppe $\pi_{\mathfrak{f}}$ übersehen. Vielleicht läßt sich neben dieser formalen Analogie ein direkter Zusammenhang zwischen dem Zerlegungsgesetz der Primideale in P/K und dem Äquivalenzverhalten der Ideale in $\mathfrak{A}$ hinsichtlich $\Pi_{\mathfrak{F}}$ herstellen, etwa vermittels der Noetherschen Gebietseinteilungen, indem man P als einen kommutativen Unterkörper von $\mathfrak{A}$ nimmt und $\pi_{\mathfrak{f}}$ als die Gruppe festlegt, für die P/K Klassenkörper ist. Dann dürfte die Vermutung nahe liegen, daß die noch unbekannten Zerlegungsgesetze der Primideale in nicht-abelschen Oberkörpern P/K mit den nicht normgebundenen Kongruenzklassengruppoiden in $\mathfrak{A}$ zusammenhängen. Daß es solche gibt, ja daß die Normgebundenheit einen Ausnahmefall darstellt, erkennt

man leicht, wenn man beachtet, daß nach § 4 jedes Gruppoid auf eine i. a. nicht-abelsche Gruppe homomorph abbildbar ist, und daß eine nicht-abelsche Kongruenzklassengruppe in $\mathfrak{A}$ niemals durch Normenbildung bezüglich K normal homomorph, d. h. bei Gruppen isomorph, auf eine Kongruenzklassengruppe in K abbildbar ist, da letztere abelsch sein muß.

Es bleibt jetzt nur noch die Definition der Führer übrig: Mit einer Verteilung der Ideale einer Abteilung $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$ auf die Kongruenzklassen hinsichtlich eines beliebigen $\Pi_{\mathfrak{F}}$, d. h. auf die einzelnen Elemente von $\Pi_{\mathfrak{F}}$, ist nach Hilfssatz 3 eine isomorphe Kongruenzklassenverteilung aller übrigen Abteilungen mitgegeben. Sind zwei in der beschriebenen Art erklärte Kongruenzklassengruppoide $\Pi_{\mathfrak{F}}$ und $\Pi'_{\mathfrak{F}'}$ vorgelegt, und verteilen sich die Ideale einer Abteilung $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}'}$ auf die Elemente von $\Pi_{\mathfrak{F}}$ und $\Pi'_{\mathfrak{F}'}$ in gleicher Weise, so heißen diese Gruppoide *gleich*: $\Pi_{\mathfrak{F}} = \Pi'_{\mathfrak{F}'}$. $\Pi_{\mathfrak{F}}$ ist dann außer durch $\mathfrak{F}$ noch durch $\mathfrak{F}'$ *erklärbar*, und man zeigt genau wie im Falle algebraischer Zahlkörper, daß $\Pi_{\mathfrak{F}}$ auch nach dem größten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ erklärbar ist. Der größte gemeinsame Teiler aller Idealsysteme, nach dem ein bestimmtes Kongruenzklassengruppoid erklärbar ist, heißt sein *Führer*.

Satz 4. *$\mathfrak{A}$ genüge der Voraussetzung $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{T}$ sei die (als Idealsystem aufgefaßte) Relativdifferente von $\mathfrak{A}$ bezüglich K. Sind dann $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$ die Führer zweier durch Satz 3 einander zugeordneter Kongruenzklassengruppoide $\Pi_{\mathfrak{F}}$ und $\pi_{\mathfrak{f}}$ in $\mathfrak{A}$ und K, so ist $\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{F}}{\mathfrak{f}}$ der größte zu $\mathfrak{f}$ prime Teiler von $\mathfrak{T}$.*

Der Beweis wird auf den letzten Abschnitt (§ 18) verschoben.

III. Beweis des speziellen Normenäquivalenzkriteriums.

§ 6. *Vorbereitung auf den Beweis.*

Es handelt sich in diesem Abschnitt um den Beweis des Satzes 1; und zwar braucht nur noch gezeigt zu werden (s. die Vorbemerkung zu Satz 1), daß seine Bedingung hinreicht, also: Haben $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$ die Bedeutung wie in § 3, und ist $\mathfrak{M}_{12}$ ein zu $\mathfrak{F}$ primes Ideal in $\mathfrak{A}$ mit $n\mathfrak{M}_{12} = (m)$ und $m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, so ist es in der Form $\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{J}_1\mu$ mit $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$ darstellbar.

Beim Beweis dieser Tatsache kann man zunächst zwei Vereinfachungen vornehmen: 1) $\mathfrak{F}$ ist ein Teiler von $\mathfrak{f}$, man braucht mithin nur eine Darstellung $\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{J}_1\mu$ mit $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{f}}$ anzugeben (bei der Bildung $\mathfrak{J}_1\mathfrak{f}$ brauchen und können nur die endlichen Primteiler von $\mathfrak{f}$ berücksichtigt werden). 2) Ist $\mathfrak{n}$ das in Hilfssatz 1, C) genannte Ideal, so kann man die Behauptung auf den Spezialfall reduzieren, daß $\mathfrak{M}_{12}$ ganz und zu $\mathfrak{n}$ teilerfremd ist, und in die folgenden zwei Behauptungen aufspalten [11]):

Hilfssatz 5. Es sei m eine Zahl aus K und $m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, dann gibt es für jede Maximalordnung $\mathfrak{J}_1$ von $\mathfrak{A}$ eine Zahl μ der Norm m mit $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{f}}$. $\mathfrak{J}_1\mu$ ist dann ein Hauptideal mod $\mathfrak{f}$ der Norm (m) und der Linksordnung $\mathfrak{J}_1$.

Hilfssatz 6. $\mathfrak{A}$ erfülle die Voraussetzung $\mathfrak{R}$. Zwei ganze zu $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{f}$ prime Ideale mit gleicher Norm und Linksordnung sind mod $\mathfrak{f}$ linksäquivalent.

Zur Vorbereitung auf den Beweis dieser Hilfssätze dient

Hilfssatz 7. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K und a eine beliebige natürliche Zahl. m sei eine Zahl in $K^{\mathfrak{p}}$, die der Kongruenz $m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^a}$ genügt. Dann gibt es ein irreduzibles

---

[11]) Vgl. die gleiche Reduktion im Falle $\mathfrak{F} = \mathfrak{J}$: I, S. 488. Der Beweis verläuft also ganz so wie im Spezialfalle $\mathfrak{F} = \mathfrak{J}$.

Polynom n-ten Grades $f(x)$ mit ganzen Koeffizienten in $K^\mathfrak{p}$, deren oberster 1 und deren unterster $(-1)^n m$ ist, welches den Bedingungen

$$(1) \qquad \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i f(x)}{dx^i}\right]_{x=1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{a(n-i)}} \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

genügt.

Beweis. Es sei $Z^\mathfrak{p}$ der unverzweigte zyklische Oberkörper n-ten Grades über $K^\mathfrak{p}$.

1) Ich weise in $Z^\mathfrak{p}$ zunächst eine Zahl μ mit $n_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\mu) = m$ und $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^a}$ nach. Dazu setze ich $\mu_1 = 1$ und bestimme $\mu_2, \mu_3, \ldots$ der Reihe nach so, daß

$$\mu_i \equiv \mu_{i-1} \pmod{\mathfrak{p}^{a(i-1)}}, \quad n_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\mu_i) \equiv m \pmod{\mathfrak{p}^{ai}}$$

ist. Dann existiert $\lim_{i\to\infty} \mu_i = \mu$, und es ist $n_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\mu) = m$ und $\mu \equiv \mu_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^a}$.

Es seien bereits $\mu_1, \ldots, \mu_i$ so gefunden, und es soll μ_{i+1} konstruiert werden. Da $Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}$ unverzweigt ist, enthält $Z^\mathfrak{p}$ sicher eine Zahl ι, deren Spur bezüglich $K^\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist. p sei eine genau einmal durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl in $K^\mathfrak{p}$. Ich setze nun $\mu_{i+1} = \mu_i(1 + xp^{ai}\iota)$ mit einer ganzen Zahl x aus $K^\mathfrak{p}$. Es ist

$$n_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\mu_{i+1}) \equiv n_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\mu_i) \cdot (1 + xp^{ai} \operatorname{Spur}_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\iota)) \pmod{\mathfrak{p}^{a(i+1)}}.$$

Wird nun x so bestimmt, daß

$$1 + xp^{ai} \operatorname{Spur}_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\iota) \equiv \frac{m}{n_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\mu_i)} \pmod{\mathfrak{p}^{a(i+1)}}$$

ist, so erfüllt μ_{i+1} die verlangten Bedingungen. Und wegen

$$\frac{m}{n_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\mu_i)} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{ai}}$$

und $\mathfrak{p} \nmid \operatorname{Spur}_{Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}}(\iota)$ ist diese Kongruenz wirklich lösbar.

2) Jetzt zeige ich, daß es sogar ein μ in $Z^\mathfrak{p}$ gibt, das diesen Bedingungen genügt und darüber hinaus vom Grade n über $K^\mathfrak{p}$ ist. Es bedeute $\iota_1, \ldots, \iota_n$ eine Basis der ganzen Zahlen von $Z^\mathfrak{p}$ bezüglich $K^\mathfrak{p}$ und S ein erzeugendes Element der Galoisschen Gruppe von $Z^\mathfrak{p}/K^\mathfrak{p}$. Es werde

$$\xi = 1 + p^a \Sigma \iota_i x_i$$

gesetzt, und den x_i solche ganzzahligen Werte in $K^\mathfrak{p}$ erteilt, daß

$$\xi^{g(1-S)(1-S^i)} \neq 1$$

mit einer (einstweilen beliebigen) natürlichen Zahl g und $i = 1, 2, \ldots, n-1$ gilt.

Es gebe gerade n' Zwischenkörper zwischen $K^\mathfrak{p}$ und $Z^\mathfrak{p}$ inklusive. Dann ist

$$K^\mathfrak{p}(\xi^{(n'+1)(1-S)}\mu) = K^\mathfrak{p}(\xi^{r(1-S)}\mu)$$

mit $0 \leqq r < n' + 1$ (Schubfachschluß!). Die Gruppe von $Z^\mathfrak{p}$ über diesem zwischen $K^\mathfrak{p}$ und $Z^\mathfrak{p}$ gelegenen Körper werde durch S^t erzeugt. Folglich ist

$$\xi^{(n'+1-r)(1-S)(1-S^t)} = 1.$$

Setzt man nun $g = (n'+1)!$, so ist wegen $0 < n' + 1 - r \leqq n' + 1$ auch

$$\xi^{g(1-S)(1-S^t)} = 1,$$

nach der Voraussetzung über ξ muß dann $S' = 1$, also

$$K^{\mathfrak{p}}(\xi^{r(1-S)}\mu) = Z^{\mathfrak{p}}$$

sein. $\mu' = \xi^{r(1-S)}\mu$ hat die Norm m und den Grad n bezüglich $K^{\mathfrak{p}}$, und es gilt $\mu' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^a}$.

3) Jetzt sind auch alle zu μ' bezüglich $K^{\mathfrak{p}}$ konjugierten Zahlen μ_i' ganz und kongruent 1 mod $\mathfrak{p}^a$. Setzt man $f(x) = \Pi\,(x - \mu_i')$, so verifiziert man

$$\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i f(x)}{dx^i}\right]_{x=0} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{a(n-i)}},$$

indem man die Identität

$$f(x+1) = \Sigma\, x^i \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i f(x)}{dx^i}\right]_{x=1} = x^n - x^{n-1}\,\Sigma\,(\mu_i' - 1) + \cdots + (-1)^n\,\Pi\,(\mu_i' - 1)$$

benutzt. $f(x)$ erfüllt mithin die verlangten Bedingungen.

§ 7. *Existenz von Hauptidealen mit vorgeschriebener Norm und Linksordnung.*

Jetzt beweise ich den Hilfssatz 5. Für jedes in $\mathfrak{f}$ oder in der Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{A}$ bezüglich K aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ von K sei $f(x) = f_{\mathfrak{p}}(x)$ das in Hilfssatz 7 konstruierte Polynom, die ebendort genannte Zahl $a = a_{\mathfrak{p}}$ sei gleich 0, wenn $\mathfrak{p}$ nur in $\mathfrak{d}$ und nicht in $\mathfrak{f}$ aufgeht, sonst dadurch bestimmt, daß $\mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}$ ist. Ferner sei $h_{\mathfrak{p}} \leqq n a_{\mathfrak{p}}$ und so groß, daß jedes Polynom $f(x)$, das der Kongruenz

$$f(x) \equiv f_{\mathfrak{p}}(x) \pmod{\mathfrak{p}^{h_{\mathfrak{p}}}} \tag{2}$$

genügt, in $K^{\mathfrak{p}}$ irreduzibel ist (vgl. Hilfssatz 2).

Nach Hilfssatz 1, D) gibt es ein Polynom $f(x)$, das (2) für alle $\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ erfüllt und des weiteren die Bedingungen a), b) in Hifssatz 1. Dann ist wegen (2) auch c) erfüllt, und nach Hilfssatz 1, A) enthält $\mathfrak{A}$ eine Wurzel μ' von $f(x) = 0$, die Norm von μ' ist m.

Für alle $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$ ist μ' über $K^{\mathfrak{p}}$ ganz algebraisch, es gibt also in $\mathfrak{A}$ Maximalordnungen $\mathfrak{J}_{i_{\mathfrak{p}}}$, so daß μ' in $\mathfrak{J}_{i_{\mathfrak{p}}}^{\mathfrak{p}}$ liegt. Die $\mathfrak{J}_{i_{\mathfrak{p}}}$ bestimmen nun eine Abteilung $\mathsf{A}_{\tilde{\mathfrak{s}}}$ im folgenden Sinne: Es gibt mindestens eine Maximalordnung $\mathfrak{J}_i$ in $\mathfrak{A}$, so daß für alle diese $\mathfrak{p}$ die Gleichheit $\mathfrak{J}_i^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_{i_{\mathfrak{p}}}^{\mathfrak{p}}$ besteht, und $\mathfrak{J}_i$ ist genau in einer Abteilung $\mathsf{A}_{\tilde{\mathfrak{s}}}$ enthalten. Ist $\mathfrak{J}_k$ eine beliebige andere Maximalordnung mit $\mathfrak{J}_k^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_{i_{\mathfrak{p}}}^{\mathfrak{p}}$, so ist sie in derselben Abteilung $\mathsf{A}_{\tilde{\mathfrak{s}}}$ enthalten; $\mathsf{A}_{\tilde{\mathfrak{s}}}$ ist also eindeutig festgelegt.

Nun sei $\mathfrak{J}_1$ eine feste Maximalordnung, und die Abteilung, in der sie enthalten ist, kann nach Hilfssatz 3 in der Form $\alpha^{-1}\mathsf{A}_{\tilde{\mathfrak{s}}}\alpha$ angesetzt werden. Man ersetze μ' durch $\mu = \alpha^{-1}\mu'\alpha$; μ genügt ebenfalls der Gleichung $f(x) = 0$, und μ ist in $\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}$ enthalten.

Es bezeichne jetzt $(\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^{b_{\mathfrak{p}}}$ die größte Potenz von $\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ derart, daß

$$\mu \equiv 1 \pmod{(\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^{b_{\mathfrak{p}}}}$$

ist. Ich behaupte $b_{\mathfrak{p}} \geqq a_{\mathfrak{p}}$. Voraussetzungsgemäß ist nämlich

$$\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i f(x)}{dx^i}\right]_{x=1} \equiv \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i f_{\mathfrak{p}}(x)}{dx^i}\right]_{x=1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}(n-1)}},$$

und in der Gleichung

$$f(\mu) = f(1) + (\mu - 1)\,f'(1) + \quad \cdots + (\mu - 1)^n = 0$$

sind die einzelnen Glieder der Reihe nach von links nach rechts durch

$$(\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^{a_{\mathfrak{p}}n},\ (\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^{a_{\mathfrak{p}}(n-1)+b_{\mathfrak{p}}},\ \ldots,\ (\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^{a_{\mathfrak{p}}+b_{\mathfrak{p}}(n-1)},\ (\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^{b_{\mathfrak{p}}n}$$

teilbar, das letzte aber auch durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$. Da aber die niedrigste Potenz von $\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ mindestens zweimal als Teiler auftreten muß, kann nicht $b_{\mathfrak{p}} < a_{\mathfrak{p}}$ sein.

Nun war $\mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}$ vorausgesetzt, es ist also $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}\mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}}$ für alle $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$; daraus folgt $\mu \equiv 1 \pmod{\cdot\ \mathfrak{J}_1\mathfrak{f}}$.

Als ein später zur Anwendung kommendes Nebenergebnis dieses Beweises formuliere ich

Hilfssatz 8. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K, a eine natürliche Zahl und $\mathfrak{J}_1$ eine Maximalordnung in $\mathfrak{A}$. μ sei eine Zahl aus $\mathfrak{A}$ und Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$ in K, die der Bedingung (1) (in Hilfssatz 7) genügt. Liegt dann μ in $\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}}$, so ist

$$\mu \equiv 1 \pmod{\cdot\ \mathfrak{J}_1\mathfrak{p}^a}.$$

§ 8. *Äquivalenz von Idealen mit gleicher Norm und Linksordnung.*

Es folgt jetzt der Beweis des Hilfssatzes 6. $\mathfrak{M}_{1i_a}$ und $\mathfrak{M}_{1j_a}$ seien zwei Ideale mit gleicher Norm und Linksordnung $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_{i_1} = \mathfrak{J}_{j_1}$. Sie seien ganz und zu $\mathfrak{f}$ und zu $\mathfrak{n}$ prim.

$$\mathfrak{M}_{1i_a} = \mathfrak{P}_{1i_2}\mathfrak{P}_{i_2i_3}\cdots\mathfrak{P}_{i_{a-1}i_a},$$
$$\mathfrak{M}_{1j_a} = \mathfrak{Q}_{1j_2}\mathfrak{Q}_{j_2j_3}\cdots\mathfrak{Q}_{j_{a-1}j_a}$$

mit $n\mathfrak{P}_{i_ki_{k+1}} = n\mathfrak{Q}_{j_kj_{k+1}} = \mathfrak{p}_k$ sei eine Zerlegung von ihnen in unzerlegbare Faktoren.

Der Nachweis, daß $\mathfrak{M}_{1j_a}$ und $\mathfrak{M}_{1i_a}$ linksäquivalent mod $\mathfrak{f}$ sind, knüpft an den Hilfssatz 1, C) an. Hiernach sind diese Ideale jedenfalls linksäquivalent im gewöhnlichen Sinne. Um zu zeigen, daß sie auch mod $\mathfrak{f}$ linksäquivalent sind, wähle man R und T in Hilfssatz 1 zur Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{A}$ und zu $\mathfrak{f}$ prim. Es sei $m = 1$; $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(x)$, $a_{\mathfrak{p}}$, $h_{\mathfrak{p}}$ mögen die Bedeutung von § 7 behalten. Die $\mathfrak{p}_k$ gehen nach der Voraussetzung nicht in $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ auf; und so kann man nach Hilfssatz 1, D) Polynome $f_k(x)$ finden, die den Bedingungen a), b), d), e), f), g) in § 1 und den Kongruenzen (2) in § 7 für alle $\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ genügen. Dann ist auch c) erfüllt, und nach Hilfssatz 1, C) enthalten die Linksordnungen $\mathfrak{J}_{i_k}$ von $\mathfrak{P}_{i_ki_{k+1}}$ solche Einheiten ε_k, daß

$$\mathfrak{M}_{1i_a} = \mathfrak{M}_{1j_a}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_a$$

ist. Wegen der Konstruktion der $f_k(x)$ gilt nach Hilfssatz 8 $\varepsilon_k \equiv 1 \pmod{\cdot\ \mathfrak{J}_{i_k}\mathfrak{f}}$, und da $\mathfrak{M}_{1i_a}$ zu $\mathfrak{f}$ prim sein sollte, ist $\mathfrak{J}_1^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_{i_2}^{\mathfrak{p}} = \cdots = \mathfrak{J}_{i_a}^{\mathfrak{p}}$ für jedes $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$. Also ist

$$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_a \equiv 1 \pmod{\cdot\ \mathfrak{J}_{i_a}\mathfrak{f}},$$

und damit sind $\mathfrak{M}_{1i_a}$ und $\mathfrak{M}_{1j_a}$ als linksäquivalent mod $\mathfrak{f}$ nachgewiesen.

IV. Der Normensatz für die arithmetische Progression.

§ 9. *Das Kongruenzverhalten der Einheiten nach gleichseitigen Idealen.*

Es sei $\mathfrak{F}$ ein ganzes Idealsystem, α eine Zahl aus einer Maximalordnung $\mathfrak{J}_1$, und $n(\alpha)$ sei mod $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$ einer Einheit aus K kongruent. Dann gehört das Ideal $n\mathfrak{J}_1\alpha$ in K zum Strahl mod $\mathfrak{f}$, wobei $\mathfrak{f}$ die Bedeutung von § 3 haben möge. Nach Satz 1 läßt sich dann $\mathfrak{J}_1\alpha$ in der Form $\mathfrak{J}_1\beta$ mit $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$ schreiben. Es gibt mithin eine Einheit ε in $\mathfrak{J}_1$, für welche $\alpha = \varepsilon\beta$ ist. Wegen $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$ ist $\varepsilon \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$. Das ergibt den

Hilfssatz 9. $\mathfrak{A}$ erfülle die Voraussetzung $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{F}$ sei ein ganzes Idealsystem aus $\mathfrak{A}$ und α eine solche Zahl aus einer Maximalordnung $\mathfrak{J}_1$ von $\mathfrak{A}$, für die $n(\alpha)$ mod $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$ einer Einheit aus K kongruent ist. Dann enthält $\mathfrak{J}_1$ eine Einheit $\varepsilon \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$.

Die Untergruppe der Einheiten $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$ bilden in der ganzen Einheitengruppe $\mathfrak{E}_1$ von $\mathfrak{J}_1$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{E}_{1\mathfrak{F}}$, ich nenne sie (in Anlehnung an die Bezeichnungsweise für ebenso gebildete Untergruppen der Modulgruppe) die zu $\mathfrak{F}$ gehörige *Hauptkongruenzuntergruppe.*

Die Faktorgruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{E}_1/\mathfrak{E}_{1\mathfrak{F}}$ ist von $\mathfrak{J}_1$, ja sogar weitgehend von $\mathfrak{A}$ unabhängig. Sie bestimmt sich nämlich allein aus dem Verhalten von $\mathfrak{A}$ an den in $n\mathfrak{F}$ aufgehenden Primidealen von K; und zwar ist sie mit der multiplikativen Gruppe derjenigen Restklassen von $\mathfrak{J}_1$ mod $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$ isomorph, deren Normen bezüglich K Einheiten aus K enthalten.

§ 10. *Existenz von Zahlen mit vorgeschriebener Norm in einer arithmetischen Progression.*

Es seien α und $\mathfrak{R}_{12}$ eine Zahl und ein Ideal aus $\mathfrak{A}$. Die Gesamtheit der Zahlen $\xi \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{R}_{12}}$ möge eine *arithmetische Progression* heißen, und der nun folgende Satz der *Normensatz für die arithmetische Progression*:

Satz 5. *$\mathfrak{A}$ erfülle die Voraussetzung $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{u}$ bezeichne das Produkt der unendlichen in $\mathfrak{A}/K$ verzweigten Primstellen von K. Es sei $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{F}_{11}$ eine Maximalordnung aus $\mathfrak{A}$ und ein ganzes gleichseitiges Ideal für $\mathfrak{J}_1$. α und b seien Zahlen aus $\mathfrak{J}_1$ und K, und es gelte*

$$b \equiv n(\alpha) \pmod{\cdot\, \mathfrak{F}_{11}}, \qquad b \equiv n(\alpha) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}.$$

Dann enthält $\mathfrak{J}_1$ eine Zahl β mit

$$\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{F}_{11}}, \qquad n(\beta) = b.$$

Aus diesem Satz kann man leicht alle bisher zur Sprache gekommenen Sätze aus der Arithmetik der hyperkomplexen Systeme herleiten. Nämlich

1) den Normensatz [12]);

2) die in Hilfssatz 9 ausgesprochene Existenzaussage für die Einheiten aus einer Maximalordnung, ja sogar eine Verschärfung von ihr, indem man erstens α in $\mathfrak{J}_1$ annimmt, zweitens voraussetzt, daß $n(\alpha)$ mod $\mathfrak{F}_{11}$ einer Einheit e aus K kongruent ist, und drittens $b = e$ wählt;

3) das Normenäquivalenzkriterium. — Beweis etwa so: $\mathfrak{M}_{12}$ sei ein ganzes Ideal der Norm (m) mit $m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, wenn $\mathfrak{f}$ der in § 3 dem Idealsystem $\mathfrak{F}$ zugeordnete Divisor aus K ist. Man schreibe $\mathfrak{M}_{12}$ in der Form $\mathfrak{M}_{12} = [\mathfrak{J}_1\alpha, \mathfrak{J}_1 m\mathfrak{F}]$ als größten gemeinsamen Teiler zweier Ideale $\mathfrak{J}_1\alpha$ und $\mathfrak{J}_1 m\mathfrak{F}$ mit $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$ und $n(\alpha) \equiv m \pmod{\cdot\, m}$ und setze m und $m\mathfrak{F}$ an Stelle von b und $\mathfrak{F}$. Dann gibt es nach Satz 5 eine Zahl β in $\mathfrak{J}_1$ mit $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{J}_1 m}$, $\beta \equiv \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$, $n(\beta) = m$; β liegt wegen der ersten Kongruenz in $\mathfrak{M}_{12}$, und wegen $(n(\beta)) = (m) = n\mathfrak{M}_{12}$ ist $\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{J}_1\beta$, also ist $\mathfrak{M}_{12}$ ein Hauptideal mod $\mathfrak{F}$.

Beweis des Satzes 5. Ist $\mathfrak{F}^r$ eine so große Potenz von $\mathfrak{F}$, daß kein in $n\mathfrak{F}$ aufgehendes Primideal von K in $n(\alpha)$ öfter aufgeht als in $n\mathfrak{F}^r$, ist ferner $\mathfrak{B}_{12} = [\mathfrak{J}_1\alpha, \mathfrak{J}_1\mathfrak{F}^r]$ und $\mathfrak{J}_1\alpha = \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{23}$, so ist $\mathfrak{B}_{23}$ ganz und zu $\mathfrak{F}$ prim. Dann ist auch $\dfrac{n(\alpha)}{n\mathfrak{B}_{12}} = n\mathfrak{B}_{23}$ ganz und zu $\mathfrak{F}$ prim, und das gleiche folgt aus der vorausgesetzten multiplikativen Kongruenz

$$b \equiv n(\alpha) \pmod{\cdot\, \mathfrak{F}_{11}}$$

---

[12]) Frühere Beweise für den Normensatz: H. Hasse und O. Schilling, Die Normen aus einer normalen Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper, Journ. reine u. angew. Math. **174** (1936), S. 248—252. H. Maaß, Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen, Abh. math. Sem. Hansische Univ. **12** (1937), S. 64—69. M. Eichler, I, Satz 3.

für $\frac{b}{n\mathfrak{B}_{12}}$, ja $n\mathfrak{B}_{23}$ und $\frac{b}{n\mathfrak{B}_{12}}$ sind deshalb sogar mod $\mathfrak{f}$ äquivalent, wenn $\mathfrak{f}$ die gleiche Bedeutung wie in § 3 hat. Nach Satz 2 ist jetzt ein ganzes Ideal $\mathfrak{C}_{24}$ mit der gleichen Linksordnung wie $\mathfrak{B}_{23}$ und der Norm $\frac{b}{n\mathfrak{B}_{12}}$ mit $\mathfrak{B}_{23}$ mod $\mathfrak{F}$ linksäquivalent.

Also ist erstens $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{C}_{24} = \mathfrak{J}_1\beta_0$ ein ganzes Hauptideal, zweitens

$$(\mathfrak{J}_1\alpha)^{-1}\mathfrak{J}_1\beta_0 = \mathfrak{B}_{23}^{-1}\mathfrak{C}_{24} = \mathfrak{J}_3\alpha^{-1}\beta_0$$

und β_0 so wählbar, daß $\alpha^{-1}\beta_0 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_3\mathfrak{F}}$ gilt, also, weil $\mathfrak{J}_1\alpha$ und $\mathfrak{J}_1\beta_0$ ganz sind,

$$\alpha \equiv \beta_0 \pmod{\alpha\mathfrak{J}_3\mathfrak{F}}, \tag{3}$$

und drittens ist

$$\frac{n(\beta_0)}{b} = e$$

eine Einheit in K.

Ist $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_3\mathfrak{F}}$ eine Einheit der Norm e in $\mathfrak{J}_3$, so folgt für $\beta = \beta_0\varepsilon^{-1}$ erstens $n(\beta) = b$, und zweitens nach (3) $\beta \equiv \beta_0 \equiv \alpha \pmod{\alpha\mathfrak{J}_3\mathfrak{F}}$, und hieraus wegen $\mathfrak{J}_3 = \alpha^{-1}\mathfrak{J}_1\alpha$ sogar $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}$, also hat β die verlangten Eigenschaften.

Zur Konstruktion eines solchen ε wird an Hilfssatz 1, B) angeknüpft. Zunächst lege man die dort genannte Zahl R fest, und zwar nehme man sie zu $\mathfrak{f}$ und zur Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{A}/K$ als teilerfremd an. Dann nehme man eine Hilfszahl γ mit

$$\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_3\mathfrak{F}}, \quad n(\gamma) \equiv e \pmod{R^n}.$$

Nach Hilfssatz 9 enthält $\mathfrak{J}_3$ eine Einheit $\varepsilon_1 \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{J}_3 R^n \mathfrak{F}}$. Ist ε_2 eine weitere Einheit mit $\varepsilon_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_3\mathfrak{F}}$ und $n(\varepsilon_2) = \frac{e}{n(\varepsilon_1)}$, so hat $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$ die verlangten Eigenschaften.

Zur Bestimmung von ε_2 ist zunächst

$$\frac{e}{n(\varepsilon_1)} \equiv b \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}, \quad \frac{e}{n(\varepsilon_1)} \equiv \frac{n(\gamma)}{n(\varepsilon_1)} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_3 R^n \mathfrak{F}}$$

zu beachten. Unter Benutzung von $\mathfrak{f}$ kann man diese Kongruenzen so schreiben:

$$\frac{e}{n(\varepsilon_1)} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \frac{e}{n(\varepsilon_1)} \equiv 1 \pmod{R^n}. \tag{4}$$

Nun setze ich $\frac{e}{n(\varepsilon_1)} = m$ und konstruiere ε_2 nach dem schon mehrfach angewandten Schema: Für alle Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{f}$ und der Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{A}/K$ bedeute $f_\mathfrak{p}(x)$ das in Hilfssatz 7 konstruierte Polynom, die Zahlen $a_\mathfrak{p}$ und $h_\mathfrak{p}$ sollen die gleiche Bedeutung wie in § 7 haben. $f(x)$ erfülle die Bedingungen a), b), d), e) in Hilfssatz 1 und die Kongruenzen (2) für alle $\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ — wegen (4) sind sie erfüllbar — dann ist wegen (2) auch c) erfüllt, und $\mathfrak{J}_3$ enthält nach Hilfssatz 1, B) eine Wurzel ε_2 von $f(x) = 0$. Nach Hilfssatz 1, A) ist $n(\varepsilon_2) = m$, ε_2 ist also von selber eine Einheit, weil m eine Einheit ist, und aus Hilfssatz 8 folgt $\varepsilon_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}_3\mathfrak{F}}$. Damit ist der Satz 5 völlig bewiesen.

§ 11. *Der Euklidische Algorithmus.*

Ich definiere: In K gelte der *Euklidische Algorithmus* mod $\mathfrak{u}$, wenn es zu je zwei ganzen Zahlen a und b mit $a \equiv b \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$ zwei weitere ganze Zahlen c und d mit

$$a = bc + d, \quad |N(d)| < |N(b)|\ ^{13}), \quad d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$$

(oder $d = 0$) gibt.

[13]) N bedeutet die Norm von K bezüglich des rationalen Zahlkörpers K_0; die Norm von $\mathfrak{A}$ bezüglich K_0 bezeichne ich mit Nn.

Satz 6. *$\mathfrak{A}$ erfülle die Voraussetzung $\mathfrak{R}$. In jeder Maximalordnung von $\mathfrak{A}$ gilt der Euklidische Algorithmus (linksseitig und rechtsseitig), wenn in K der Euklidische Algorithmus* mod u *gilt.*

Beweis. Unter der gemachten Voraussetzung hat K die Strahlklassenzahl 1 mod u [14]), dann hat $\mathfrak{A}$ nach Satz 2 die (absolute) Idealklassenzahl 1. Sollen nun in einer Maximalordnung $\mathfrak{J}_1$ von $\mathfrak{A}$ zu zwei Zahlen α und β zwei andere γ und δ mit

$$\alpha = \beta\gamma + \delta, \qquad |Nn(\delta)| < |Nn(\beta)| \text{ [13])}$$

gefunden werden, so darf man vorher α und β durch den größten gemeinsamen Linksteiler teilen, oder man darf voraussetzen, daß α und β linksseitig teilerfremd sind. Es gibt dann in $\mathfrak{J}_1$ eine Zahl γ_0 so, daß $\alpha_0 = \alpha - \beta\gamma_0$ und $n(\beta)$ teilerfremd sind; mithin darf man auch gleich von vornherein α und $n(\beta)$ als teilerfremd annehmen.

Voraussetzungsgemäß gibt es jetzt in K eine ganze Zahl d mit

$$d \equiv n(\alpha) \pmod{n(\beta)}, \tag{5}$$

$$d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}, \qquad |N(d)| < |Nn(\beta)|,$$

und weil α und $n(\beta)$ teilerfremd sind, ist (5) zugleich eine multiplikative Kongruenz. Nach Satz 5 enthält dann $\mathfrak{J}_1$ eine Zahl δ mit

$$n(\delta) = d, \qquad \delta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{J}_1 n(\beta)}.$$

Da $\beta\mathfrak{J}_1$ in $n(\beta)\mathfrak{J}_1$ aufgeht, gibt es eine Zahl γ in $\mathfrak{J}_1$, so daß

$$\alpha = \beta\gamma + \delta$$

ist, und es war $|Nn(\delta)| = |N(d)| < |Nn(\beta)|$.

An den Beweis darf die Vermutung geknüpft werden, daß in den Maximalordnungen von $\mathfrak{A}$ unter Umständen auch dann der Euklidische Algorithmus gelten kann, wenn er in K nicht gilt. Jedenfalls wird die praktische Durchführung des Divisionsverfahrens bei geeigneter Wahl der Hilfsgrößen α_0 (die bei dem Endergebnis jedes einzelnen Schrittes ja herausfallen) meist bereits nach wenigen Schritten zum Ziel führen.

V. Die *L*-Reihen und ihre Funktionalgleichungen [15]).

§ 12. *Definition der L-Reihen und ihr Zusammenhang mit den L-Reihen des Zentrums.*

Die Ideale einer Abteilung $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$ seien auf die Elemente eines normgebundenen Kongruenzklassengruppoids $\Pi_{\mathfrak{F}}$ mit dem Führer $\mathfrak{F}$ verteilt, und $\pi_{\mathfrak{f}}$ sei die $\Pi_{\mathfrak{F}}$ vermöge Satz 3 zugeordnete Kongruenzklassengruppe in K mit dem Führer $\mathfrak{f}$. Es sei χ ein Charakter von $\pi_{\mathfrak{f}}$, dann definiere ich einen *Charakter* $\mathsf{X} = \mathsf{X}(\chi)$ von $\Pi_{\mathfrak{F}}$ durch die Festsetzung

$$\mathsf{X}(\mathfrak{M}_{ik}) = \chi(n\mathfrak{M}_{ik}). \tag{6}$$

---

[14]) Man braucht nur zu zeigen, daß es zu jeder ganzen Zahl a aus K eine Einheit $e \equiv a \pmod{\mathfrak{u}}$ gibt. Das geschieht so: Es seien b und c zwei weitere ganze Zahlen aus K mit $b \equiv c \equiv a \pmod{\mathfrak{u}}$, und b sei zu a teilerfremd. Dann ist $a' = ac \equiv b' = bc \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$. Durch Anwendung des Euklidischen Divisionsverfahrens mod u auf a' und b' erhält man eine Zahl $d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$ als größten gemeinsamen Teiler von a' und b'. Es ist also $(d) = (c)$; d ist dann das Produkt von c mit einer Einheit e, und es gilt $e \equiv a \pmod{\mathfrak{u}}$.

[15]) In diesem Abschnitt setze ich die Arbeit von K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Diss. Hamburg 1929 (zitiert mit H) voraus. Vgl. dazu auch M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. 4, 1, Berlin 1935 (zitiert mit D). Die Untersuchungen der §§ 14—17 hier schließen sich daneben eng an die bekannten Arbeiten von Hecke über die Funktionalgleichung der *L*-Reihen für algebraische Zahlkörper an.

Die Resultate dieses Abschnittes gelten sämtlich bis auf § 13 auch für total definite Quaternionenalgebren, welche also die Voraussetzung $\mathfrak{R}$ nicht erfüllen. Man beachte nämlich, daß hier von den Ergebnissen der früheren Abschnitte nur die Teilaussage des Satzes 2 benutzt wird, daß die Normen von mod $\mathfrak{F}$ äquivalenten Idealen in K mod $\mathfrak{f}$ äquivalent sind, und diese gilt unabhängig von der Voraussetzung $\mathfrak{R}$. Trotzdem lasse ich diese Voraussetzung auch jetzt nicht fallen, um einen bequemeren Anschluß an das Frühere zu haben.

Sind $\mathfrak{M}_{ik}, \mathfrak{M}_{i'k'}$ zwei Ideale aus $\mathsf{A}_{\mathfrak{F}}$, und existiert das Produkt $\mathfrak{M}_{ik}\mathfrak{M}_{i'k'}$, so ist

$$\mathsf{X}(\mathfrak{M}_{ik})\mathsf{X}(\mathfrak{M}_{i'k'}) = \mathsf{X}(\mathfrak{M}_{ik}\mathfrak{M}_{i'k'}).$$

Ist $\bar{\chi}$ der zu χ konjugierte Charakter, so setze ich

$$\bar{\mathsf{X}}(\mathfrak{M}_{ik}) = \bar{\chi}(n\mathfrak{M}_{ik}).$$

Aus $\bar{\chi}\chi = 1$ folgt dann $\mathsf{X}\bar{\mathsf{X}} = 1$.

Die Komplexe der Klassen $x_1, x_2, \ldots$ von $\pi_{\mathfrak{f}}$, für welche $\chi(x_1) = \chi(x_2) = \cdots$ gleich ausfällt, bilden eine durch χ eindeutig bestimmte zyklische Kongruenzklassengruppe π_χ; sie ist ein homomorphes Bild von $\pi_{\mathfrak{f}}$. Ihr Führer heißt der Führer von χ, er wird mit $\mathfrak{f}_\chi$ bezeichnet. Ist dann Π_{X} das nach Satz 3 zu π_χ gehörige Kongruenzklassengruppoid in A, so soll dessen Führer der *Führer* von X heißen und mit $\mathfrak{F}_{\mathsf{X}}$ bezeichnet werden. Wenn $\mathfrak{F}_{\mathsf{X}} = \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{f}$ ist, so heißen X und χ *eigentliche Charaktere mod* $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$.

$\mathfrak{f}$ ist bekanntlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der f_χ für alle Charaktere χ von $\pi_{\mathfrak{f}}$, weil Klassen von $\pi_{\mathfrak{f}}$ dann und nur dann gleich sind, wenn sie für alle Charaktere von $\pi_{\mathfrak{f}}$ den gleichen Charakterwert haben. Ebenso sind nach Satz 3 Klassen von $\Pi_{\mathfrak{F}}$ dann und nur dann gleich (und zwar muß man sich hier auf Klassen mit einer festen Links- oder Rechtseinheit in $\Pi_{\mathfrak{F}}$ beschränken), wenn sie für alle Charaktere von $\Pi_{\mathfrak{F}}$ den gleichen Charakterwert haben. Also ist auch $\mathfrak{F}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der $\mathfrak{F}_{\mathsf{X}}$ für alle Charaktere X von $\Pi_{\mathfrak{F}}$. Man braucht den Satz 4 mithin nur noch für Führer von Charakteren zu beweisen.

Ich setze nun

$$L(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K}) = \sum \mathsf{X}(\mathfrak{M}_{1i})\,|N n\mathfrak{M}_{1i}|^{-ns}\ ^{16}), \tag{7}$$

wobei $\mathfrak{K}$ eine Linksklasse oder eine Rechtsklasse für eine Maximalordnung $\mathfrak{J}_1$ bedeutet und $\mathfrak{M}_{1i}$ alle ganzen Ideale dieser Klasse durchlaufen möge. Wird über alle Linksklassen oder Rechtsklassen für $\mathfrak{J}_1$ summiert, so erhält man die nur noch von $\mathfrak{A}$ abhängige *L-Reihe*

$$L(s, \mathsf{X}) = \sum_{\mathfrak{K}} L(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K}) = \sum \mathsf{X}(\mathfrak{M}_{1i})\,|N n\mathfrak{M}_{1i}|^{-ns}, \tag{8}$$

wo jetzt rechts über alle ganzen Linksideale oder Rechtsideale für $\mathfrak{J}_1$ zu summieren ist.

Zum Hauptcharakter $\chi = 1 \bmod \mathfrak{f}$ gehört der *Hauptcharakter* $\mathsf{X} = 1 \bmod \mathfrak{F}$, und $L(s, 1) = \mathsf{Z}(s)$ ist die Zetafunktion von $\mathfrak{A}$. Ebenso wie sich $\mathsf{Z}(s)$ als ein Eulerprodukt schreiben läßt, ist auch $L(s, \mathsf{X})$ ein Eulerprodukt

$$L(s, \mathsf{X}) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(s, \mathsf{X}),$$

und die $L_{\mathfrak{p}}(s, \mathsf{X})$ lassen sich genau wie die $\mathfrak{p}$-Beiträge zu $\mathsf{Z}(s)$ berechnen[17]), wenn man nur die Definition (6) von X beachtet:

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{p}}(s, \mathsf{X}) &= \sum_{n_i=0}^{\infty} \chi(\mathfrak{p})^{n_0+\cdots+n_{k_{\mathfrak{p}}-1}}\,|N\mathfrak{p}|^{(n_0+\cdots+n_{k_{\mathfrak{p}}-1})ns-e_{\mathfrak{p}}(0\cdot n_0+1\cdot n_1+\cdots+(k_{\mathfrak{p}}-1)\cdot n_{k_{\mathfrak{p}}-1})} \\ &= \prod_{i=0}^{k_{\mathfrak{p}}-1} (1 - \chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-e_{\mathfrak{p}}i)})^{-1}, \end{aligned}$$

dabei bedeutet $k_{\mathfrak{p}}$ und $e_{\mathfrak{p}}$ Kapazität und Verzweigungsgrad des $\mathfrak{p}$ teilenden Primideals in $\mathfrak{A}$. Setzt man

$$l(s, \chi) = \sum \chi(\mathfrak{m})\,|N\mathfrak{m}|^{-s}, \tag{9}$$

---

[16]) An Stelle der n-ten Potenzen der mittels der Hauptgleichung gebildeten Normen könnte man hier die Normen im Sinne der charakteristischen Gleichung nehmen, wie es sonst üblich ist.

[17]) Vgl. H, S. 5—8. D, S. 129—130.

summiert über alle ganzen Ideale $\mathfrak{m}$ aus K, so ist

$$(10) \qquad L(s,\chi) = \prod_{i=0}^{n-1} l(ns-i,\chi) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (1-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-i)})}{\prod_{i=0}^{k_\mathfrak{p}-1} (1-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-e_\mathfrak{p} i)})},$$

wenn $\mathfrak{d}$ die Diskriminante von $\mathfrak{A}$ bezüglich K bedeutet. Dies ist die erste Funktionalgleichung für $L(s,\mathsf{X})$.

§ 13. *Die Residuen der Zetafunktionen für die einzelnen absoluten Idealklassen von* $\mathfrak{A}$.

In diesen Zusammenhang gehört ein Satz, der zwar weiter unten keine Rolle mehr spielen wird, der aber doch erwähnenswert scheint.

Satz 7. *$\mathfrak{A}$ genüge der Voraussetzung* $\mathfrak{R}$. *Es seien $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_h$ sämtliche absoluten Links- oder Rechtsidealklassen für eine feste Maximalordnung $\mathfrak{J}_1$ von $\mathfrak{A}$. Dann haben die Zetafunktionen*

$$\mathsf{Z}(s,\mathfrak{K}_i) = \sum |Nn\mathfrak{M}_{1i}|^{-ns},$$

summiert über alle ganzen Ideale $\mathfrak{M}_{1i}$ aus $\mathfrak{K}_i$, bei $s=1$ alle das gleiche Residuum. (Dieses hängt dann bekanntlich auch nicht einmal mehr von $\mathfrak{J}_1$ ab, sondern ist eine Invariante von $\mathfrak{A}$.)

Beweis. Es bedeuten $\chi_1, \ldots, \chi_h$ alle Charaktere der Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{u}$ in K. Für $\chi_j = \mathsf{X}(\chi_j)$ ist dann nach (6) und dem Normenäquivalenzkriterium

$$(11) \qquad L(s,\mathsf{X}_j) = \sum_{i=1}^{h} \chi_j(\mathfrak{k}_i)\,\mathsf{Z}(s,\mathfrak{K}_i),$$

wenn $\mathfrak{k}_i$ die Strahlklasse mod $\mathfrak{u}$ in K bedeutet, welche die Normen der Ideale der Klasse $\mathfrak{K}_i$ aus $\mathfrak{A}$ enthält. Nach (10) folgt aus der Regularität der $l(s,\chi_j)$ außer für den Hauptcharakter $\chi_1 = 1$, daß die $L(s,\mathsf{X}_j)$ außer für $\mathsf{X}_1 = 1$ bei $s=1$ regulär sind. Daher ist nach (11)

$$\lim_{s\to 1} \frac{1}{h}(s-1)\,L(s,1) = \lim_{s\to 1}(s-1)\sum_{j=1}^{h} \chi_j(\mathfrak{k}_i^{-1})\,L(s,\mathsf{X}_j) = \lim_{s\to 1}(s-1)\,\mathsf{Z}(s,\mathfrak{K}_i),$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

§ 14. *Komplementäre Basen.*

Zur Herleitung der zweiten Funktionalgleichung für $L(s,\mathsf{X})$ bedarf es einiger Vorbereitungen über komplementäre Basen (§ 14), Gaußsche Summen (§ 15) und Thetafunktionen (§ 16).

Zunächst etwas Bekanntes[18]). K_0 sei der rationale Zahlkörper, der lineare Rang von $\mathfrak{A}$ über K_0 sei m. $\mathfrak{N}_{12}$ sei ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{A}$ und $\nu_1, \ldots, \nu_m$ eine Basis von $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ bezüglich K_0. Bezeichnet S die reduzierte Spur von $\mathfrak{A}$ bezüglich K_0, so werden durch die linearen Gleichungen

$$(12) \qquad S(\nu_i \tilde{\nu}_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

weitere m Größen $\tilde{\nu}_i$ eindeutig definiert, und es ist

$$\widetilde{\mathfrak{N}_{12}^{-1}} = [\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_m] = \mathfrak{N}_{12}\mathfrak{D}_{22}^{-1} = \mathfrak{D}_{11}^{-1}\mathfrak{N}_{12}$$

das zu $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ komplementäre Ideal; dabei bedeuten $\mathfrak{D}_{11}$ und $\mathfrak{D}_{22}$ die Differenten der Links-

[18]) Vgl. D, S. 83—87.

und Rechtsordnung von $\mathfrak{N}_{12}$. Speziell ist $\tilde{\mathfrak{J}}_1 = \mathfrak{D}_{11}^{-1}$, und nach (12) sind die Spuren aller Zahlen aus $\mathfrak{D}_{11}^{-1}$ ganz.

Es sei ξ eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{A}$, aber kein Nullteiler. Es gibt rationale Zahlen $x_{ik}, \tilde{x}_{ik}$ so, daß

$$\xi v_i = \sum_{k=1}^{m} x_{ik} v_k, \quad \tilde{v}_i \xi^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{x}_{ik} \tilde{v}_k \tag{13}$$

ist. Bedeuten

$$v = \Sigma v_i n_i, \quad \tilde{v} = \Sigma \tilde{v}_i n_i \tag{14}$$

mit Veränderlichen n_i die allgemeinen Zahlen aus $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ und $\widetilde{\mathfrak{N}_{12}^{-1}}$, so sind

$$f(\xi v) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} x_{ik} n_i \Big)^2, \; f^*(\tilde{v}\xi^{-1}) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ik} n_i \Big)^2 \tag{15}$$

definite quadratische Formen in den n_i.

Hilfssatz 10. Von den Formen $f(\xi v)$ und $f^*(\tilde{v}\xi^{-1})$ ist jede die reziproke der anderen; ihre Determinanten sind $|Nn(\xi)|^{2n}$ und $|Nn(\xi)|^{-2n}$.

Beweis. Es bezeichne F die Koeffizientenmatrix der Form $f(\xi v)$. Die zu einer Matrix X spiegelbildliche werde mit X' bezeichnet. Nach (13), (14), (15) ist

$$F = (x_{ik})' (x_{ik}).$$

Die Determinante $|x_{ik}|$ ist bekanntlich gleich der Norm von ξ im Sinne der regulären Darstellung von $\mathfrak{A}$, also gleich $Nn(\xi)^n$; mithin ist $|F| = |Nn(\xi)|^{2n}$.

Die Matrix der zu $f(\xi v)$ reziproken Form ist

$$F^{-1} = (x_{ik})^{-1} (x_{ik})'^{-1}. \tag{16}$$

Nach (14) und (12) ist

$$S(\tilde{v}_i \xi^{-1} \xi v_l) = S\Big(\sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_{ij} \sum_{k=1}^{m} x_{lk} \tilde{v}_j v_k \Big) = (\tilde{x}_{ij}) (x_{kl})' = \begin{cases} 1 & \text{für } i = l, \\ 0 & \text{für } i \neq l, \end{cases}$$

das bedeutet

$$(x_{ik}) = (\tilde{x}_{ik})'^{-1},$$

also nach (16)

$$F^{-1} = (\tilde{x}_{ik})' (x_{ik}),$$

und dies ist nach (13), (14), (15) die Koeffizientenmatrix von $f^*(\tilde{v}\xi^{-1})$.

§ 15. *Gaußsche Summen.*

Es sei $\mathfrak{F}$ ein ganzes Idealsystem und χ ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{F}$.

$$\varrho = \Sigma v_i r_i \tag{17}$$

sei eine veränderliche Größe in $\mathfrak{A}$; für die Zahl $\tilde{v}$ in (14) gilt dann nach (12)

$$\Sigma n_i r_i = S(\tilde{v}\varrho) = S(\varrho\tilde{v}). \tag{18}$$

Es werde noch zur Abkürzung

$$\widetilde{\mathfrak{N}_{12}^{-1-1}} = \mathfrak{N}_{12}^{*} \tag{19}$$

gesetzt.

Hilfssatz 11. Man setze

$$G(\tilde{v}, \mathfrak{N}_{12}, \chi) = \sum_{\varrho} \chi(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho)\, e^{2\pi i S(\tilde{v}\varrho)}, \tag{20}$$

wobei ϱ ein Restsystem von $\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ mod $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ durchlaufen möge. Liegt v in $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$, so ist

erstens $G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X})$ von der speziellen Wahl des Restsystems unabhängig definiert. Zweitens gibt es eine nur von $\mathfrak{A}$ und X abhängige Zahl $G(\mathsf{X})$, so daß

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \mathsf{X}(\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^{*})\, G(\mathsf{X}) \tag{21}$$

ist.

Die Größen $G(\mathsf{X})$ sind die hyperkomplexen *Gaußschen Summen.*

Beweis. Es mögen ϱ_1 und ϱ_2 je ein Restsystem von $\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ mod $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ durchlaufen, wobei immer $\varrho_1 \equiv \varrho_2 \pmod{\mathfrak{N}_{12}^{-1}}$ sei. Dann ist erstens $\mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho_1) = \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho_2)$, denn $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho_1$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho_2$ sind mod $\mathfrak{F}$ linksäquivalent. Da ν in $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ liegen sollte, ist $\tilde{\nu}$ in $\widetilde{\mathfrak{N}_{12}^{-1}} = \mathfrak{D}_{11}^{-1}\mathfrak{N}_{12}$ gelegen, also ist zweitens $\tilde{\nu}(\varrho_1 - \varrho_2)$ in $\mathfrak{D}_{11}^{-1}$ gelegen; $S(\tilde{\nu}(\varrho_1 - \varrho_2))$ ist also ganz und $S(\tilde{\nu}\varrho_1) \equiv S(\tilde{\nu}\varrho_2) \pmod 1$. Und man erhält für beide Restsysteme den gleichen Wert für $G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X})$.

Nun sei $\mathfrak{N}_{23}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{F}$ primes Ideal. Man kann dann ϱ gleichzeitig ein Restsystem von $\mathfrak{N}_{23}^{-1}\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ mod $\mathfrak{N}_{23}^{-1}\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ und von $\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ mod $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ durchlaufen lassen und erhält

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}\mathfrak{N}_{23}, \mathsf{X}) = \sum_{\varrho} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\mathfrak{N}_{23}\varrho)\, e^{2\pi i S(\tilde{\nu}\varrho)} = \mathsf{X}(\mathfrak{N}_{23})\, G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}),$$

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}\mathfrak{N}_{23}, \mathsf{X}) = \overline{\mathsf{X}}(\mathfrak{N}_{23}^{-1})\, G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}). \tag{22}$$

Ebenso gilt für ein zu $\mathfrak{F}$ teilerfremdes $\mathfrak{N}_{31}$

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{31}\mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \overline{\mathsf{X}}(\mathfrak{N}_{31}^{-1})\, G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}). \tag{23}$$

Für eine beliebige Zahl α ist weiterhin

$$G(\tilde{\nu}\alpha, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \sum_{\varrho} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\alpha^{-1}\alpha\varrho)\, e^{2\pi i S(\tilde{\nu}\alpha\varrho)},$$

$$G(\tilde{\nu}\alpha, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}\alpha^{-1}, \mathsf{X}), \tag{24}$$

und unter Benutzung von $S(\alpha\tilde{\nu}\varrho) = S(\varrho\alpha\tilde{\nu})$ verifiziert man ebenso

$$G(\alpha\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = G(\tilde{\nu}, \alpha^{-1}\mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}). \tag{25}$$

Ist $\mathfrak{J}_2\alpha^{-1}$ zu $\mathfrak{F}$ teilerfremd, so folgt aus (24) und (22)

$$G(\tilde{\nu}\alpha, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \overline{\mathsf{X}}(\alpha\mathfrak{J}_2)\, G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}), \tag{26}$$

und ist $\alpha^{-1}\mathfrak{J}_1$ zu $\mathfrak{F}$ teilerfremd, so folgt aus (25) und (23)

$$G(\alpha\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \overline{\mathsf{X}}(\mathfrak{J}_1\alpha)\, G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}). \tag{27}$$

Es ist für jedes α (vgl. (19))

$$\tilde{\nu}\alpha\mathfrak{N}_{12}^{*} = \tilde{\nu}(\mathfrak{N}_{12}\alpha^{-1})^{*};$$

wie man also das Ideal $\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^{*}$ auch in zwei Faktoren $\tilde{\nu}$ und $\mathfrak{N}_{12}^{*}$ teilt, man erhält wegen (24) für $G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X})$ immer den gleichen Wert, mit anderen Worten, $G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X})$ ist eine Funktion von $\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^{*}$ und X allein.

Ist dieses Ideal zu $\mathfrak{F}$ teilerfremd, so kann man es in zwei zu $\mathfrak{J}_2\mathfrak{F}$ teilerfremde Faktoren ν und $\mathfrak{N}_{12}^{*}$ aufspalten, dann ist nach (22) und (27)

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \overline{\mathsf{X}}(\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^{*})\, G(1, \mathfrak{D}_{11}, \mathsf{X})$$

und nach (23) und (26)

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \overline{\mathsf{X}}(\mathfrak{N}_{12}^{*}\tilde{\nu})\, G(1, \mathfrak{D}_{22}, \mathsf{X}) = \overline{\mathsf{X}}(\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^{*})\, G(1, \mathfrak{D}_{22}, \mathsf{X}).$$

Die Zahl

$$G(1, \mathfrak{D}_{11}, \mathsf{X}) = G(1, \mathfrak{D}_{22}, \mathsf{X}) = G(\mathsf{X})$$

ist nur noch von $\mathfrak{A}$ und X abhängig, und in diesem Falle ist der Hilfssatz 11 richtig.

Ist jedoch $\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^*$ zu X nicht teilerfremd, so ist $\overline{\mathsf{X}}(\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^*) = 0$, weil X ein eigentlicher Charakter sein sollte; nun hat man $G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = 0$ zu beweisen. Es sollte ν in $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ liegen, also $\tilde{\nu}$ in $\mathfrak{N}_{12}^{*-1}$, und $\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^*$ in $\mathfrak{J}_1$. Es sei $\mathfrak{F}_{31}$ der größte gemeinsame Teiler von $\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^*$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{J}_1$; er hat $\mathfrak{J}_1$ als Rechtsordnung und ist voraussetzungsgemäß von $\mathfrak{J}_1$ verschieden. $\tilde{\nu}$ liegt dann in $\mathfrak{F}_{31}\mathfrak{N}_{12}^{*-1}$.

In $\mathfrak{J}_1$ gibt es jetzt eine Zahl α_1 mit der Eigenschaft

$$\alpha_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{F}\mathfrak{F}_{31}^{-1}},\ \alpha_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}}. \tag{28}$$

Da X als ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{F}$ nach keinem echten Teiler von $\mathfrak{F}$ erklärbar ist, gibt es der zweiten Kongruenz (28) zufolge eine weitere Zahl α_2 in $\mathfrak{J}_1$ so, daß $1 + \alpha_2\alpha_1$ zu $\mathfrak{J}_1\mathfrak{F}$ prim und $\mathsf{X}(1 + \alpha_2\alpha_1) \neq 1$ ist. Nun ist

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \sum_{\varrho} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho(1 + \alpha_2\alpha_1)) e^{2\pi i S(\tilde{\nu}\varrho(1+\alpha_2\alpha_1))},$$

denn mit ϱ durchläuft $\varrho(1 + \alpha_2\alpha_1)$ ein Restsystem von $\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ mod $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$. Folglich ist

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \mathsf{X}(1 + \alpha_2\alpha_1) \sum_{\varrho} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho) e^{2\pi i S(\tilde{\nu}\varrho(1+\alpha_1\alpha_1))}. \tag{29}$$

Weil $\tilde{\nu}$ in $\mathfrak{F}_{31}\mathfrak{N}_{12}^{*-1}$ liegt, ist die Zahl $\tilde{\nu}\varrho\alpha_2\alpha_1$ wegen der ersten Kongruenz (28) für jedes ϱ aus $\mathfrak{N}_{21}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ im Komplement $\mathfrak{D}_{33}^{-1}$ der Linksordnung $\mathfrak{J}_3$ von $\mathfrak{F}_{31}$ enthalten, sie hat also eine ganze Spur. Dann ist $S(\tilde{\nu}\varrho(1 + \alpha_2\alpha_1) \equiv S(\tilde{\nu}\varrho) \pmod 1$, und wegen (29)

$$G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X}) = \mathsf{X}(1 + \alpha_2\alpha_1) G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X});$$

das aber geht bei $\mathsf{X}(1 + \alpha_2\alpha_1) \neq 1$ nur, wenn $G(\tilde{\nu}, \mathfrak{N}_{12}, \mathsf{X})$ verschwindet. Damit ist der Hilfssatz 11 völlig bewiesen.

§ 16. *Eine Thetaformel.*

Es bedeute Δ die Diskriminante von $\mathfrak{A}$ bezüglich des rationalen Zahlkörpers K_0. Ich setze

$$c = \left| \frac{(Nn\mathfrak{N}_{12})^{2n} (Nn\mathfrak{F})^n}{\Delta} \right|^{\frac{1}{m}},\ c^* = \frac{1}{c} \tag{30}$$

und definiere unter Benutzung der Bezeichnungen (15) die Thetafunktionen

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X}) &= |Nn\mathfrak{N}_{12}|^{\frac{n}{2}} \sum_{\nu} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\nu)\, e^{-\pi c f(\xi\nu)}, \\ \vartheta^*(\xi^{-1}, \mathfrak{N}_{12}^{*-1}, \overline{\mathsf{X}}) &= |Nn\mathfrak{N}_{12}^*|^{\frac{n}{2}} \sum_{\tilde{\nu}} \overline{\mathsf{X}}(\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^*)\, e^{-\pi c^* f^*(\tilde{\nu}\xi^{-1})}, \end{aligned} \tag{31}$$

wobei in der ersten Gleichung über alle Zahlen ν aus $\mathfrak{N}_{21}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ und in der zweiten über alle $\tilde{\nu}$ aus $\mathfrak{N}_{12}^{*-1} = \mathfrak{N}_{12}^{-1}$ zu summieren ist. Es ist

$$\vartheta(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X}) = |Nn\mathfrak{N}_{12}|^{\frac{n}{2}} \sum_{\varrho} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho) \sum_{\nu} e^{-\pi c f(\xi(\nu+\varrho))},$$

summiert über alle Zahlen ν aus $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$ und ein Restsystem ϱ von $\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ mod $\mathfrak{N}_{12}^{-1}$. Haben ν und ϱ die Gestalt (14) und (17), so steht rechts im Exponenten des allgemeinen Summengliedes die definite quadratische Form $f(\xi(\nu + \varrho))$ in den Veränderlichen $n_i + r_i$. Nach der allgemeinen Thetatransformationsformel [19]), nach Hilfssatz 10 und nach (18)

[19]) Vgl. etwa E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig 1927, S. 62.

folgt jetzt

$$\vartheta(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X}) = \frac{|Nn\mathfrak{N}_{12}|^{\frac{n}{2}}}{|Nn(\xi)|^n c^{\frac{m}{2}}} \sum_{\varrho,\tilde{\nu}} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\varrho)\, e^{2\pi i S(\tilde{\nu}\varrho)}\, e^{-\pi c^* f^*(\tilde{\nu}\xi^{-1})},$$

wobei jetzt $\tilde{\nu}$ alle Zahlen von $\mathfrak{N}_{12}^{*-1}$ durchläuft. Wegen (30) und

$$|Nn\mathfrak{N}_{12}^*|^n = |Nn\mathfrak{N}_{12}^{-1} \cdot Nn\mathfrak{D}_{22}|^n = |Nn\mathfrak{N}_{12}^{-1}|^n \Delta$$

einerseits und Hilfssatz 11 andererseits ist dies gleich

$$\vartheta(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X}) = \frac{W(\mathsf{X})}{|Nn(\xi)|^n}\, \vartheta^*(\xi^{-1}, \mathfrak{N}_{12}^{*-1}, \bar{\mathsf{X}}), \tag{32}$$

wobei zur Abkürzung

$$W(\mathsf{X}) = \frac{G(\mathsf{X})}{|Nn\mathfrak{F}|^{\frac{n}{2}}} \tag{33}$$

gesetzt wurde.

Völlig analog beweist man

$$\vartheta^*(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{*-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X}) = \frac{W(\mathsf{X})}{|Nn(\xi)|^n}\, \vartheta(\xi^{-1}, \mathfrak{N}_{12}^{-1}, \bar{\mathsf{X}}); \tag{34}$$

dann folgt durch Vergleich von (33) und (34)

$$W(\mathsf{X})\, W(\bar{\mathsf{X}}) = 1.$$

Da aber $W(\mathsf{X})$ und $W(\bar{\mathsf{X}})$ ihrer Definition gemäß konjugiert komplex sind, hat deshalb $W(\mathsf{X})$ den Absolutbetrag 1.

§ 17. *Die zweite Funktionalgleichung für $L(s, \mathsf{X})$.*

Im folgenden werde X vom Hauptcharakter verschieden angenommen. Es bedeute $\mathfrak{K}$ eine feste Klasse von Linksidealen für $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{N}_{12}\mathfrak{F}$ ein ganzes oder gebrochenes Ideal aus dieser Klasse. $\mathfrak{K}^*$ sei ferner die Klasse, der das Ideal $\mathfrak{N}_{12}^*$ angehört. Dann ist

$$\begin{aligned} L(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K}) &= |Nn\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}|^{ns} \sum_{\mathfrak{E}_2|\nu} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\nu)\, |Nn(\nu)|^{-ns}, \\ L(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K}^*) &= |Nn\mathfrak{N}_{12}^{*-1}|^{ns} \sum_{\tilde{\nu}|\mathfrak{E}_2} \bar{\mathsf{X}}(\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^*)\, |Nn(\tilde{\nu})|^{-ns}, \end{aligned} \tag{35}$$

wobei über ein System von Zahlen ν aus $\mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}$ zu summieren ist, die sich zu je zweien nicht um einen linksseitigen Faktor aus der Einheitengruppe $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{J}_2$ unterscheiden, und über ein System von Zahlen $\tilde{\nu}$ aus $\mathfrak{N}_{12}^{*-1}$, die sich zu je zweien nicht um einen rechtsseitigen Faktor aus $\mathfrak{E}_2$ unterscheiden; dies soll durch die Schreibweise $\mathfrak{E}_2|\nu$ und $\tilde{\nu}|\mathfrak{E}_2$ unter dem Summenzeichen angedeutet sein [20]).

Nun bedeute n_0 den Grad von K über K_0, es ist also

$$m = n_0 n^2 \tag{36}$$

der lineare Rang von $\mathfrak{A}$ über K_0. Es gebe $r_1 + r_3$ reelle und $2r_2$ imaginäre zu K konjugierte Körper, $\mathfrak{A}/K$ sei an r_3 (reellen) unendlichen Primstellen verzweigt; r_3 ist höchstens dann von Null verschieden, wenn n gerade ist. Dann setze ich

$$\Phi(s) = |\Delta(Nn\mathfrak{F})^n|^{\frac{s}{2}}\, \pi^{-\frac{n_0 n^2}{2}s}\, 2^{-r_2 n^2 s - r_3 \frac{n^2}{2}s} \prod_{i=0}^{n-1} \left[\Gamma\left(\frac{ns-i}{2}\right)^{r_1} \Gamma(ns-i)^{r_2}\right] \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(ns-2i)^{r_3}. \tag{37}$$

$$\xi = \sum \nu_i x_i = \sum \tilde{\nu}_i \tilde{x}_i \tag{38}$$

[20]) Die Summation braucht nicht auf Nichtnullteiler ν beschränkt zu werden; denn ist ν Nullteiler, so ist $\mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\nu) = 0$, und diese Summenglieder fallen von selbst fort.

sei eine variable Größe in $\mathfrak{A}$, dann ist bekanntlich

$$(39)\quad |Nn\mathfrak{N}_{12}|^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\cdots\!\int e^{-\pi c\Sigma x_i^2} |Nn(\xi)|^{n(s-1)}\, dx_1 \cdots dx_m = C\, c^{-\frac{n_0 n^2}{2} s} |\Delta(Nn\mathfrak{F})^n|^{-\frac{s}{2}} \Phi(s)$$ [21])

mit einer festen Konstanten C. Hierin ersetze man ξ durch $\xi\nu$; Σx_i^2 geht dann nach (13), (14), (15) in $f(\xi\nu)$ über. Darauf multipliziere man mit $\mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\nu)$ und summiere über ein gleiches System von Zahlen ν wie in (35), dann erhält man nach (35) [22])

$$(40)\quad \sum_{\mathfrak{E}_2|\nu} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\cdots\!\int |Nn\mathfrak{N}_{12}|^{\frac{n}{2}} \mathsf{X}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{12}\nu)\, e^{-\pi c f(\xi\nu)} |Nn(\xi)|^{n(s-1)}\, dx_1 \cdots dx_m$$

$$= C \left| \frac{(Nn\mathfrak{N}_{12}\mathfrak{F})^{2n}}{c^{n_0 n^2} \Delta(Nn\mathfrak{F})^n} \right|^{\frac{s}{2}} L(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K})\, \Phi(s).$$

Analog, wenn man in (39) X durch $\overline{\mathsf{X}}$, x_i durch $\tilde{x}_i$, c durch c^*, $\mathfrak{N}_{12}\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{N}_{12}^*$, ξ durch $\tilde{\nu}\xi$ ersetzt, ebenfalls nach (35)

$$(41)\quad \sum_{\tilde{\nu}|\mathfrak{E}_2} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\cdots\!\int |Nn\mathfrak{N}_{12}^*|^{\frac{n}{2}} \overline{\mathsf{X}}(\tilde{\nu}\mathfrak{N}_{12}^*)\, e^{-\pi c^* f^*(\tilde{\nu}\xi)} |Nn(\xi)|^{n(s-1)}\, dx_1 \cdots dx_m$$

$$= C \left| \frac{(Nn\mathfrak{N}_{12}^*)^{2n}}{c^{n_0 n^2} \Delta(Nn\mathfrak{F})^n} \right|^{s} L(s, \overline{\mathsf{X}}, \mathfrak{K}^*)\, \Phi(s).$$

Auf Grund des Wertes (30) für c und c^* (unter Beachtung von $|Nn\mathfrak{N}_{12}^*|^n = |Nn\mathfrak{N}_{12}^{-1}|^n \Delta$ (vgl. § 16)) und des Wertes (36) von m wird (40) und (41) bezüglich zu

$$CL(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K})\, \Phi(s), \qquad CL(s, \overline{\mathsf{X}}, \mathfrak{K}^*)\, \Phi(s).$$

Nun wird in der bekannten Weise Summation und Integration vertauscht, und die Summationsbeschränkung wird in eine Integrationsbeschränkung umgewändelt. Nach (31) erhält man so

$$(42)\quad \begin{aligned} CL(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K})\, \Phi(s) &= \int_{\xi|\mathfrak{E}_2}\!\cdots\!\int \vartheta(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X})\, |Nn(\xi)|^{n(S-1)}\, dx_1 \cdots dx_m, \\ CL(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K}^*)\, \Phi(s) &= \int_{\mathfrak{E}_2|\xi}\!\cdots\!\int \vartheta^*(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{*-1}, \overline{\mathsf{X}})\, |Nn(\xi)|^{n(S-1)}\, dx_1 \cdots dx_m, \end{aligned}$$

dabei wird jetzt über einen Fundamentalbereich der Einheitengruppe $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{J}_2$ integriert, d. h. über einen Bereich von Zahlen ξ, die sich zu je zweien nicht um einen rechtsseitigen bzw. einen linksseitigen Faktor aus $\mathfrak{E}_2$ unterscheiden.

Die Integrationsbereiche dieser Integrale teilt man jetzt in je zwei Teile, den ersten in F_1 mit $|Nn(\xi)| < 1$ und F_2 mit $|Nn(\xi)| > 1$, den zweiten in F_1' mit $|Nn(\xi)| < 1$ und F_2' mit $|Nn(\xi)| > 1$. Die Integrale über F_1 und F_1' werden dann weiter umgeformt: Man setzt in sie die Gleichung (32) ein und nimmt die Variablentransformation $\xi \to \xi^{-1}$ vor. Dabei gehen F_1 in F_2' und F_1' in F_2 über, und man erhält [23])

$$\begin{aligned} CL(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K})\, \Phi(s) &= \int_{F_1'}\!\cdots\!\int W(\mathsf{X})\, \vartheta^*(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{*-1}, \mathsf{X})\, |Nn(\xi)|^{-ns}\, dx_1 \cdots dx_m \\ &\quad + \int_{F_1}\!\cdots\!\int \vartheta(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X})\, |Nn(\xi)|\, dx_1 \cdots dx_m, \\ CL(s, \overline{\mathsf{X}}, \mathfrak{K}^*)\, \Phi(s) &= \int_{F_2}\!\cdots\!\int \frac{1}{W(\mathsf{X})}\, \vartheta(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathsf{X})\, |Nn(\xi)|^{-ns}\, dx_1 \cdots dx_m \\ &\quad + \int_{F_2'}\!\cdots\!\int \vartheta^*(\xi, \mathfrak{N}_{12}^{*-1}, \overline{\mathsf{X}})\, |Nn(\xi)|^{-n(s-1)}\, dx_1 \cdots dx_m; \end{aligned}$$

die vier Integrale konvergieren für alle s, und man hat die Funktionalgleichung

$$L(s, \mathsf{X}, \mathfrak{K})\, \Phi(s) = W(\mathsf{X}) L(1-s, \overline{\mathsf{X}}, \mathfrak{K}^*)\, \Phi(1-s).$$

---

[21]) H, S. 25—32 (dort nur für $r_2 = r_3 = 0$). D, S. 130 (die Formel enthält einen Druckfehler!).

[22]) Vgl. H, S. 19.

[23]) Vgl. dazu H, S. 22.

Läßt man $\mathfrak{R}$ alle Linksklassen für $\mathfrak{J}_1$ durchlaufen, so durchläuft $\mathfrak{R}^*$ alle Rechtsklassen, durch Summation erhält man dann nach (8) die gesuchte zweite Funktionalgleichung

$$L(s, \mathsf{X})\, \Phi(s) = W(\mathsf{X}) L(1-s, \overline{\mathsf{X}})\, \Phi(1-s). \tag{43}$$

§ 18. *Vergleich der Funktionalgleichungen* [24]).

$\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$ seien wieder die Führer von X und χ, r_4 bedeute die Anzahl der in $\mathfrak{f}$ aufgehenden unendlichen Primstellen und d die Diskriminante von K bezüglich K_0. Setzt man

$$\varphi(s) = |dN\mathfrak{f}|^{\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{n_0 s}{2}} 2^{-r_2 s}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1+r_2} \Gamma(s)^{r_2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^{r_4}, \tag{44}$$

so gilt bekanntlich

$$l(s, \chi)\, \varphi(s) = w(\chi)\, l(1-s, \chi)\, \varphi(1-s) \tag{45}$$

für die L-Reihe $l(s, \chi)$ für K, wobei $w(\chi)$ eine Konstante vom Betrage 1 ist. Es werde zur Abkürzung

$$\delta(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (1 - \chi(\mathfrak{p})\, |N\mathfrak{p}|^{-(ns-i)})}{\prod_{i=0}^{k_\mathfrak{p}-1} (1 - \chi(\mathfrak{p})\, |N\mathfrak{p}|^{-(ns-e_\mathfrak{p} i)})} \tag{46}$$

geschrieben; dann ist nach (10), (43), (45), (37), (44)

$$W(\mathsf{X}) = w(\chi)^n \frac{\delta(s, \chi)}{\delta(1-s, \overline{\chi})} \left|\frac{\Delta(Nn\mathfrak{F})^n}{d^{n^2} (N\mathfrak{f})^{n^2}}\right|^{s-\frac{1}{2}} Q(s) \tag{47}$$

mit

$$Q(s) = \left[2^{-n^2\left(s-\frac{1}{2}\right)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-i-ns}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{ns-i}{2}\right)} \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(ns-2i)}{(\Gamma n-2i-ns)}\right]^{r_3} \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{ns-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-i+1-ns}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-ns}{2}\right) \Gamma\frac{ns-i+1}{2}}\right]^{r_4}.$$

Nun ist höchstens für ein gerades n die Zahl $r_4 \neq 0$, und alsdann

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{ns-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-i+1-ns}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-ns}{2}\right) \Gamma\left(\frac{ns-i+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{ns-n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1-ns}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-ns}{2}\right) \Gamma\left(\frac{ns+1}{2}\right)} = \frac{\sin \pi \frac{ns+1}{2}}{\sin \pi \frac{ns+1-n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}. \tag{48}$$

Ebenso ist auch $r_3 \neq 0$ höchstens für gerades n, und alsdann nach der Legendreschen Verdoppelungsformel für die Gammafunktion in der Gestalt

$$\Gamma\left(\frac{ns-2i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{ns-2i-1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{-ns+2i+2}\, \Gamma(ns-2i-1),$$

$$\Gamma\left(\frac{n-2i-ns}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2i-1-ns}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{-n+2i+2+ns}\, \Gamma(n-2i-1-ns),$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-i-ns}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{ns-i}{2}\right)} = 2^{n^2\left(s-\frac{n}{2}\right)} \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(n-2i-1-ns)}{\Gamma(ns-2i-1)} = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n^2\left(s-\frac{1}{2}\right)} \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(n-2i-ns)}{\Gamma(ns-2i)}. \tag{49}$$

---

[24]) Die Rechnungen hier verlaufen so wie in D, S. 131—132. (Vgl. auch M. Zorn, Note zur analytischen hyperkomplexen Zahlentheorie, Abh. math. Sem. Hamburg Univ. **9** (1933), S. 197—201.)

(48) und (49) in (47) eingesetzt ergibt

$$W(\mathsf{X}) = w(\chi)^n\,(-1)^{\frac{n}{2}(r_3-r_4)}\,\frac{\delta(s,\chi)}{\delta(1-s,\bar{\chi})}\left|\frac{\Delta(Nn\mathfrak{F})^n}{d^{n^2}(N\mathfrak{f})^{n^2}}\right|^{s-\frac{1}{2}}. \tag{50}$$

Weiterhin ist für $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$ stets $\chi(\mathfrak{p}) = 0$, also nach (46)

$$\frac{\delta(s,\chi)}{\delta(1-s,\bar{\chi})} = \prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}\left[\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-i)}}{1-\bar{\chi}(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(n-i-ns)}}\prod_{i=0}^{k_\mathfrak{p}-1}\frac{1-\bar{\chi}(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(n-e_\mathfrak{p}i-ns)}}{1-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-e_\mathfrak{p}i)}}\right].$$

Hier heben sich die Faktoren mit $i = 0$ links oben und rechts unten sowie rechts oben und links unten kreuzweise fort, und es bleibt

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}&\left[\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-i)}}{1-\bar{\chi}(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{ns-i}}\prod_{i=1}^{k_\mathfrak{p}-1}\frac{1-\bar{\chi}(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{ns-e_\mathfrak{p}i}}{1-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-e_\mathfrak{p}i)}}\right]\\ &= \prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}\left[\prod_{i=1}^{n-1}(-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{-(ns-i)})\prod_{i=0}^{k_\mathfrak{p}-1}(-\chi(\mathfrak{p})\,|N\mathfrak{p}|^{ns-e_\mathfrak{p}i}\right]\\ &= \prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}(-\chi(\mathfrak{p}))^{n-k_\mathfrak{p}}\,|N\mathfrak{p}|^{-n(n-k_\mathfrak{p})\left(s-\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Somit geht (50) in

$$W(\mathsf{X}) = w(\chi)^n\,(-1)^{\frac{n}{2}(r_3-r_4)}\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}(-\chi(\mathfrak{p}))^{n-k_\mathfrak{p}} \tag{51}$$

und

$$\Delta(Nn\mathfrak{F})^n = d^{n^2}(N\mathfrak{f})^{n^2}\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}|N\mathfrak{p}|^{n(n-k_\mathfrak{p})} \tag{52}$$

über.

Aus (52) folgt der Satz 4 für die Führer $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$ von X und χ, und nach § 12 braucht man ihn nur für Führer von Charkteren zu beweisen: Ist nämlich $\mathfrak{T}$ die Relativdifferente von $\mathfrak{A}$ bezüglich K, so ist bekanntlich

$$n\mathfrak{T} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}}\mathfrak{p}^{n-k_\mathfrak{p}} \tag{53}$$

und

$$\Delta = d^{n^2}(Nn)^n,$$

also nach (52)

$$N(n\mathfrak{T}\mathfrak{F}) = N\Big(\mathfrak{f}^n\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}\mathfrak{p}^{n-k_\mathfrak{p}}\Big). \tag{54}$$

Da nach § 3 die in $n\mathfrak{F}$ und in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primideale von K übereinstimmen, ist deshalb

$$n\mathfrak{T}\mathfrak{F} = \mathfrak{f}^n\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}}\mathfrak{p}^{n-k_\mathfrak{p}}$$

oder nach (53)

$$n\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{F}}{\mathfrak{T}_\mathfrak{f}\mathfrak{f}} = (1) \tag{55}$$

zu vermuten, wobei $\mathfrak{T}_\mathfrak{f}$ den größten zu $\mathfrak{f}$ primen Teiler von $\mathfrak{T}$ bedeutet. Weil ein Idealsystem durch seine Norm bezüglich K eindeutig bestimmt wird, wäre (55) gerade die Behauptung des Satzes 4. Auf die Richtigkeit von (55) kann man aber aus (54) nur dann schließen, wenn in $\mathfrak{f}$ und $n\mathfrak{F}$ nur Primideale mit verschiedener Absolutnorm auf-

gehen. Nun ist indessen die Beziehung (55) zwischen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{T}$ mit den Gleichungen

$$n\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{F}^{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{T}_{\mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}}\mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}} = (1) \tag{56}$$

für alle in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ von K äquivalent (wobei hier natürlich $\mathfrak{F}^{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}$ als Idealsysteme von $\mathfrak{A}$ und nicht von $\mathfrak{A}^{\mathfrak{p}}$ aufzufassen sind). Und diese Gleichungen lassen sich auch bestätigen: Sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$ zwei einander zugeordnete Führer in $\mathfrak{A}$ und K, so treten auch ihre $\mathfrak{p}$-Komponenten als Führer auf, die zueinander gehören — man braucht dies nur für $\mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}$ zu wissen und kann dann das gleiche für $\mathfrak{F}^{\mathfrak{p}}$ aus Satz 3 schließen. — Die Gleichung (54) für $\mathfrak{F}^{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{f}^{\mathfrak{p}}$ angesetzt, ergibt (56) für alle $\mathfrak{p}$, und alsdann folgt (55).

Unter Benutzung von (55) kann man (51) auch in der Form

$$W(\mathsf{X}) = w(\chi)^n\,(-1)^{\frac{n}{2}(r_s-r_s)+a}\,\mathsf{X}\left(\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{F}}{\mathfrak{f}}\right) \tag{57}$$

schreiben, wenn a die Anzahl der gleichen oder verschiedenen in $\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{F}}{\mathfrak{f}}$ aufgehenden Primteiler bedeutet.

Eingegangen 2. Mai 1938.

Wissenschaftliche Wettbewerbe der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V.

Die Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V. schreibt *jährlich sich wiederholende Wettbewerbe* für wissenschaftliche Arbeiten aus. Zugelassen sind wissenschaftliche Arbeiten von Wert aus den Gebieten der Zeitmeßkunde und Uhrentechnik. Die Teilnahme ist offen für jedermann.

Für Preise steht bis auf weiteres alljährlich ein Betrag von 2000 RM zur Verfügung. Wettbewerbsarbeiten müssen jeweils bis zum 1. April des Jahres bei der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V., Berlin SW 68, Neuenburger Str. 8, in einer für den Druck geeigneten Form eingereicht sein, um in dem betreffenden Jahre zur Wertung zu gelangen. Später einlaufende Arbeiten können in der Regel erst beim nächstjährigen Wettbewerb gewertet werden.

Im übrigen wird auf die vorjährige Ankündigung in diesem Journal (Bd. 178, S. 192) verwiesen.

Eingegangen 22. Oktober 1938.

Soeben erscheint:

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse

Von

Dr. phil. OTTO HAUPT
Professor an der Universität Erlangen

Unter Mitarbeit von

Dr. phil. GEORG AUMANN
Professor an der Universität Frankfurt a. M.

*

I. Band: **Einführung in die reelle Analysis**
Mit 2 Figuren. 196 Seiten. Geb. RM 11.20

II. Band: **Differentialrechnung**
Mit 1 Figur. 168 Seiten. Geb. RM 9.80

III. Band: **Integralrechnung**
183 Seiten. Geb. RM 10.60

(Göschens Lehrbücherei, Bd. 24—26)

*

Dieses Werk will eine Bekanntschaft mit den wichtigsten Fragen und Verfahren aus der Differential- und Integralrechnung vermitteln. Unbeschadet der Wahrung eines elementaren Standpunktes sind hierbei insbesondere neue, auch für die Anwendungen wichtige Forschungen in Betracht gezogen, die jedenfalls in einführenden Lehrbüchern bisher nicht behandelt wurden.

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 35